

COURS D'AUTOMATIQUE

TOME 1

signaux et systèmes

BTS

IUT

ÉCOLES D'INGÉNIEURS

CHEZ LE MEME EDITEUR

Des mêmes auteurs :

Cours d'automatique

*Tome 2 - Asservissement. Régulation.
Commande analogique*

*Tome 3 - Commande par ordinateur.
Identification*

A paraître :

M. Rivoire, J. Groleau et J.L. Ferrier

Exercices d'automatique

1 - Signaux et systèmes

*2 - Asservissement, régulation, commande
analogique*

Autres ouvrages :

P. Guyenot et Th. Hans

Régulation et asservissement

Eléments de cours et problèmes résolus

Th. Hans, J. Filippini et P. Guyenot

Asservissements numériques

Eléments de cours - Applications

J. Barry et J.Y. Kersulec

Schémas d'électricité

D. Dindeleux

Technique de la régulation industrielle

D. Jaume, S. Thelliez et M. Vergé

**Commande des systèmes dynamiques par
ordinateur**

H. Largeaud

Le schéma électrique

LIVRES ETRANGERS DIFFUSES PAR EYROLLES

J.E. Cooling

Software Design for Real-Time Systems

CHAPMAN AND HALL

D'A

Si

E

Maurice Ri

*ancien élève de l'ENS
Professeur ENS
à l'I.U.T. d'Ang*

COURS D'AUTOMATIQUE

TOME 1

Signaux et systèmes

BTS
IUT
ÉCOLES D'INGÉNIEURS

Maurice Rivoire

*ancien élève de l'ENS de Cachan
Professeur ENSAM
à l'I.U.T. d'Angers*

Jean-Louis Ferrier

*Ingénieur INSA
Professeur à l'université d'Angers
Laboratoire d'Ingénierie des
Systèmes Automatisés (LISA)*

DEUXIÈME ÉDITION
Revue et corrigée



EYROLLES

Destiné à des étudiants de 1^{er} cycle (BTS, IUT) et 2nd cycle (maîtrises, formations d'ingénieur), ce cours d'Automatique s'adresse aussi aux ingénieurs et techniciens en activité et aux stagiaires de formation continue.

Ce tome 1 expose les principes mathématiques utilisés actuellement pour l'étude des signaux et des systèmes, avec une approche « technique ». Il se veut un ouvrage d'outils pour aborder la commande des processus et l'identification et plus généralement le traitement des signaux continus et discrets. Le calculateur numérique, désormais très répandu dans les Universités et le secteur industriel induit de nouvelles méthodes d'analyse et de traitement des problèmes.

Un effort tout particulier a été fait pour rendre accessibles des notions réputées difficiles. Des exemples et exercices résolus illustrent les thèmes traités :

- signaux : continus, discrets, échantillonnés ;
- transformées en théorie du signal : C , L , Z , F ;
- représentation et réponse des systèmes continus et échantillonnés ;
- variables d'Etat ;
- signaux aléatoires — méthode des moindres carrés ;
- technologie des systèmes pilotés par calculateur.

Prévu dans le cadre d'un cours d'Automatique, ce volume s'adresse aussi à tous ceux qui souhaitent acquérir les notions modernes de traitement du signal.


EYROLLES



9 782212 095473
ISBN 2-212-09547-3

conception et réalisation P. Monier

**Les Editions Eyrolles
vous proposent
deux services gratuits**

1 - UN CATALOGUE COMPLET

de la discipline qui vous intéresse :

vous nous écrivez en nous précisant
cette discipline et votre adresse

**2 - UN SERVICE PERMANENT
D'INFORMATIONS**

sur nos nouvelles parutions

vous retournez la carte postale
que vous trouverez dans ce livre

Service "Lecteurs"
Editions Eyrolles
61, Bld Saint Germain
75240 Paris Cedex 05
Tél. : (1) 44.41.11.11.

En application de la loi du 11 mars 1957 (articles 40 et 41 ; Code pénal, article 425), il est interdit de reproduire intégralement ou partiellement le présent ouvrage, sur quelque support que ce soit, sans autorisation de l'Editeur ou du Centre Français d'exploitation du droit de Copie, 6 bis rue Gabriel Laumain, 75010 Paris.

© Editions EYROLLES, 1989, 1992
ISBN 2-212-09547-3

à Catherine

à Geneviève

AVANT-PROPOS

Ce livre présente un ensemble d'outils utiles dans l'étude de la commande des processus et leur identification, ou, plus généralement, dans le traitement des signaux discrets et continus. C'est à dessein que les mathématiques voisinent avec la technologie.

L'ouvrage rassemble des chapitres enseignés dans les IUT, BTS, ainsi que dans les maîtrises scientifiques et écoles d'ingénieurs.

Le développement des moyens de traitement numérique (microordinateurs) et l'existence de nombreux logiciels va dans le sens de l'étude des systèmes directement dans le domaine temporel. Il nous est apparu important de rendre accessibles les concepts associés à l'utilisation généralisée de l'ordinateur.

Ce cours, à caractère pédagogique, s'attache à :

- dégager les règles communes à des ensembles qui paraissent hétérogènes en évitant le flot des détails
- exposer en détail au contraire certains points délicats et cela avec des exemples
- solliciter la participation du lecteur qui trouvera en face du signe ? placé en marge, des exemples concrets ou des exercices simples qu'il pourra résoudre.

Le niveau mathématique de certains chapitres ne doit pas effrayer, la complexité n'est due qu'à un manque d'habitude. Nous recommandons la persévérance dans l'étude des chapitres consacrés aux distributions et aux variables d'état.

Les deuxième et troisième tomes, consacrés à la commande des processus et à l'identification, utilisent abondamment les résultats développés ici.

L'ouvrage comprend 6 parties.

- La première est consacrée à la description des signaux. Nous y avons introduit la notion de « distribution ». La plus connue est celle de Dirac qui représente le signal impulsionnel. De plus, l'interaction des signaux et des systèmes décrite par le produit de convolution se situe en fait dans le champ des « distributions » plutôt que dans celui des fonctions. Il convient d'initier les étudiants de premier cycle à cette théorie certes difficile mais néanmoins abordable si on en privilégie l'aspect concret.

- La deuxième partie traite de la représentation temporelle des signaux et des systèmes.

La réponse impulsionnelle et le produit de convolution sont présentés.

Les systèmes linéaires à temps invariant, continus et discrets ont été menés de front.

- Les grandes transformations, introductives à la notion de fonction de transfert, ont été regroupées dans une troisième partie pour manifester l'unité profonde qui les rassemble.

Nous avons commencé par la transformation cissoïdale C qui n'est autre que la justification rigoureuse de l'usage des nombres complexes en régime sinusoïdal permanent.

Elle permet d'aborder les transformations de Laplace, en Z et la transformation de Fourier dans une optique nouvelle.

La transformée de Laplace est présentée dans l'esprit des distributions mais sans y faire explicitement référence, les applications à l'électronique sont abondamment illustrées.

Après la transformée en z exposée de façon classique, nous avons décrit de manière assez détaillée la transformation de Fourier.

La série de Fourier n'apparaît que comme un cas particulier de transformée appliquée à une distribution périodique.

De même, la transformation de Fourier des signaux échantillonnés et des signaux discrets est présentée dans le cadre de la formule générale.

- Deux planches illustrées résument les résultats et les formules.
- Dans la quatrième partie, nous développons les méthodes temporelles d'étude des systèmes linéaires.

Une comparaison préalable, faite au chapitre 16, des systèmes discrets et continus permet de mener de front l'étude des équations récurrentes avec celle, plus classique, des équations différentielles.

L'étude est limitée au premier ordre puisque toute équation du n -ième ordre peut se ramener à une expression matricielle du premier ordre dont l'étude fait l'objet de la cinquième partie.

Le problème, toujours délicat des conditions initiales a été détaillé.

- La cinquième partie introduit le concept d'espace d'état qui permet de traiter les systèmes dynamiques d'ordre quelconque. La théorie moderne de la commande fait aussi usage des signaux aléatoires. La loi de Gauss, à la base de la plupart des théories des processus stochastiques et la technique fondamentale des moindres carrés sont présentées.

- La commande de processus par ordinateur pose au concepteur certains problèmes d'ordre technologique; la sixième partie apporte quelques renseignements pratiques essentiels.

Les auteurs apprécieront les remarques de leurs collègues et les observations que les utilisateurs de cet ouvrage voudront bien leur formuler.

Le Tome 1 présente automaticiens, mais qu'ils soient électroniciens.

Les Tomes 2 et 3 s'adressent aux automaticiens. Ils traitent la Commande. Après l'exposé des méthodes, sont présentés les processus qui sont basés sur la commande.

1^{re} partie : Description du signal, porteur d'information et dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel.
2^{de} partie : Représentation et à temps discret

L'utilisation de plus en plus de la relation temporelle des relations standard.

3^{de} partie : Représentation des systèmes

Le domaine fréquentiel et des interactions avec le domaine temporel en Z , et une transformée sinusoïdale (transformée Cissoidal).

4^{de} partie : Réponse des systèmes
La résolution de l'équation de réponse d'un système à l'usage de l'ordinateur linéaires.

5^{de} partie : Approche moderne
La représentation d'état du comportement; elle est illustrée par les signaux aléatoires pour la commande des signaux-test privés de bruit.

Note au lecteur

Le Tome 1 présente des outils à usage général. Il ne concerne pas les seuls automaticiens, mais tous ceux qui étudient les phénomènes à l'aide de modèles, qu'ils soient électroniciens, biologistes ou même économistes.

Les Tomes 2 et 3 s'adressent plus particulièrement aux électroniciens et surtout aux automaticiens.

Ils traitent la Commande des Systèmes et leur Identification.

Après l'exposé des méthodes classiques, fondées sur la représentation fréquentielle, sont présentées les méthodes actuelles de pilotage et d'identification des processus qui sont basées sur l'utilisation de l'ordinateur.

Plan du Tome 1

Signaux et Systèmes

1^{re} partie : Description des signaux

Le signal, porteur d'énergie et d'information est décrit dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel.

2^e partie : Représentation temporelle des signaux et des systèmes à temps continu et à temps discret

L'utilisation de plus en plus courante de l'ordinateur passe par une représentation temporelle des relations entre systèmes. L'équation récurrente en est la forme standard.

3^e partie : Représentation fréquentielle de signaux. Fonctions de transfert des systèmes

Le domaine fréquentiel est le domaine privilégié de représentation des systèmes et des interactions avec les signaux. Les transformations de Laplace, de Fourier, en Z, et une transformation moins connue mais indispensable en régime sinusoïdal (transformée Cissoïdale) ont entre elles une profonde unité.

4^e partie : Réponse des systèmes

La résolution de l'équation différentielle ou de l'équation récurrente fournit la réponse d'un système à une excitation.

L'usage de l'ordinateur permet la simulation de systèmes complexes ou non linéaires.

5^e partie : Approche moderne des systèmes

La représentation d'état d'un système permet de cerner au plus près son comportement ; elle est indispensable pour l'étude des systèmes multivariables. Les signaux aléatoires possèdent des propriétés statistiques intéressantes qui en font des signaux-test privilégiés pour l'identification.

6^e partie : Technologie des systèmes pilotés par ordinateur
L'étude théorique, indispensable pour la maîtrise des systèmes, ne suffit pas au concepteur. Les renseignements pratiques, dispersés dans de nombreux documents ont été réduits ici à l'essentiel.

Plan du Tome 2

Asservissement - Régulation Commande analogique

1^{re} partie : Asservissement-Régulation : les concepts

Elle précise les buts de la commande et l'organisation de la structure bouclée d'un asservissement. Le signal de commande est calculé à partir de l'écart observé entre l'objectif poursuivi et le résultat réellement atteint.

2^e partie : Les processus à réguler

Seuls, leurs modèles linéaires seront utilisés, parmi lesquels, ceux du premier et du second ordre sont privilégiés. Pour les systèmes d'ordre supérieur, nous introduisons la notion de pôles dominants. L'effet d'un retard pur est analysé.

3^e partie : Les performances des systèmes analogiques régulés

Un système doit être stable, précis (vis-à-vis d'une consigne d'entrée), insensible aux perturbations, et il doit répondre rapidement. Le signal de commande doit rester dans des limites acceptables pour éviter la saturation des amplificateurs et la fatigue excessive des actionneurs.

4^e partie : La commande analogique

Le rôle et les méthodes de synthèse du correcteur analogique P.I.D., abondamment répandu dans l'industrie, sont exposés. La synthèse programmée sur ordinateur est donnée en détail.

Plan du Tome 3

Commande par ordinateur Identification

5^e partie : La commande numérique

On précise les concepts de commande numérique « vraie ». La méthode de synthèse des correcteurs numériques est exposée, ce qui conduit aisément à l'équation de récurrence à programmer dans le calculateur.

6^e partie : Commande dans l'espace d'état

Les éléments relatifs à la commande par retour d'état y sont regroupés. Les points essentiels de commandabilité, observabilité, reconstruction d'état, ... indispensables en commande multivariable, sont étudiés dans le cadre monovariable qui caractérise notre ouvrage.

7^e partie : Identification

On présente quelques méthodes de l'identification. On obtient le plus souvent les paramètres du modèle (mathématique) d'un système (physique) par des essais de laboratoire et par l'étude de la réponse à des signaux d'excitation appropriés. La méthode statistique, basée sur les moindres carrés, identifie le processus sous la forme d'une équation récurrente, forme parfaitement adaptée au calcul de la commande.

TOM

Chap. 1.

Chap. 2.

2^e
et

Chap. 3. I

Chap. 4. I

TOME 1. SIGNAUX ET SYSTÈMES

1^{re} partie : Description des signaux

Chap. 1.	Le signal décrit par une fonction	1
	1. Le signal analogique	1
	2. Le signal numérique	2
	3. Les signaux définis par une somme	2
	4. Les signaux définis par une différence	4
Chap. 2.	Le signal décrit par une distribution : Initiation à la théorie des distributions	5
	1. Définitions préliminaires : qu'est-ce qu'une distribution?	7
	2. L'ensemble $\mathcal{D}$ des fonctions de départ	7
	3. Définition d'une distribution sur $\mathcal{D}$	8
	4. Les conventions des physiciens : mises en garde	9
	5. Quelques propriétés (utiles en théorie du signal)	9
	6. Dérivée d'une distribution	11
	7. Transformée de Fourier d'une distribution	13

2^e partie : Représentation temporelle des signaux et des systèmes à temps continu et à temps discret

Chap. 3.	Les signaux à temps continu	18
	1. La rampe unitaire causale	18
	2. L'échelon unitaire. Fonction d'Heaviside	18
	3. L'impulsion unitaire. Impulsion de Dirac	19
	4. Le signal harmonique ou sinusoïdal	21
	5. Autres signaux	22
Chap. 4.	Les signaux à temps discret	25
	1. Échantillonnage	25
	2. Numérisation	28
	3. Comparaison entre s^* et $[s(kT)]$	29
	4. Les signaux numériques fondamentaux	29
	5. Conversion analogique-numérique et numérique-analogique	32

Chap. 5.	Les systèmes : classification	34	
	1. Classification des entrées-sorties	34	
	2. Les systèmes monovariabiles	34	
	3. La relation entrée-sortie des S.L.T.I.	36	
Chap. 6.	La réponse des systèmes : Convolution	37	Chap. 10.
	1. Définition du produit de convolution	37	
	2. Quelques propriétés. Convolution avec l'impulsion de Dirac	38	
	3. La réponse impulsionnelle d'un S.L.T.I. causal	39	
	4. La réponse d'un S.L.T.I. causal à une excitation quelconque	40	
	5. Approximation d'une impulsion brève par un Dirac (démonstration)	42	
	6. Détermination de la réponse impulsionnelle : déconvolution	43	Chap. 11.
	7. Convolution câblée	44	
3^e partie : Représentation fréquentielle des signaux			
Fonction de transfert des systèmes			
Chap. 7.	La transformation $\mathcal{C}$: transformation cissoïdale	48	Chap. 12.
	1. Définition	48	
	2. Propriétés	49	
	3. Applications. Résolution des problèmes de régime permanent sinusoïdal	50	Chap. 13.
	4. Conclusion	52	d
Chap. 8.	La transformation $\mathcal{L}$: transformation de Laplace	54	
	1. Définition de la transformée de Laplace (monolatère) $\mathcal{L}$	54	
	2. Quelques propriétés	56	
	3. Transformée de Laplace de la dérivée	58	Chap. 14.
	4. Les transformées des signaux-test	60	T
	5. Les théorèmes de la valeur initiale et finale	62	1
	6. Application à la résolution des équations différentielles	63	2
	7. Des schémas équivalents fort utiles en électricité	63	3
	8. Transformée de Laplace : tableau résumé	67	4
Chap. 9.	La transformation $\mathcal{Z}$: transformée en z des signaux numériques	68	5
	1. Le signal numérique	68	6
	2. Définition de la transformée en z (monolatère) $\mathcal{Z}$	69	
	3. Quelques propriétés	71	Chap. 15.
	4. Décalage des signaux non causals	73	Fo
	5. Transformée en z des fonctions-tests	75	1.
			2.

34	6. Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale ...	76
34	7. Recherche de l'original	77
34	8. Application à la résolution des équations récurrentes ..	79
36	9. Transformation $\mathcal{L}$ et transformation $\mathcal{Z}$: relations	80
	10. Transformée en z modifiée	82
37	Chap. 10. La transformation $\mathcal{F}$: transformation de Fourier du signal apériodique	84
37	1. Le couple de Fourier	86
38	2. Un exemple : la transformée du créneau centré	87
39	3. Propriétés de la transformation $\mathcal{F}$	88
	4. Transformée de Fourier d'un produit de convolution ..	91
40	5. Transformée de Fourier du produit de corrélation	92
42	6. L'énergie du signal. Théorème de Parseval	92
43	Chap. 11. Transformée de Fourier de quelques distributions	94
44	1. Transformée de la distribution de Dirac	94
	2. Transformée d'une constante 1	95
	3. Transformée d'un peigne de Dirac	95
	4. Transformée d'une sinusoïde	96
	5. Transformée de la dérivée.	97
48	Chap. 12. Transformée de Fourier des signaux périodiques	101
48	1. Duplication d'un motif. Périodisation	101
49	2. Transformée d'une fonction périodique	101
50	Chap. 13. Transformée de Fourier des signaux échantillonnés. Théorème de Shannon	104
52	1. Transformée de $s^*(t)$	104
54	2. Reconstruction du signal temporel : théorème de Shannon	105
54		
56		
58	Chap. 14. Transformée de Fourier discrète	108
60	1. Discrétisation des intégrales	109
62	2. Transformée de Fourier directe	110
63	3. Transformée de Fourier inverse	111
63	4. Transformée de Fourier discrète et transformée en z ...	112
67	5. Transformée de Fourier rapide	113
	6. Transformée de Fourier à plusieurs dimensions	114
68	Tables de transformées de Fourier	115
68		
69	Chap. 15. Fonctions de transfert	120
71	1. Définition	120
73	2. Fonction de transfert d'un système à temps discret	120
75		

3. Fonction de transfert d'un système à temps continu ...	121
4. Fonction de transfert d'un système (continu) échantillonné	121
Appendice	124

4^e partie : Réponse des systèmes

Chap. 16. Système numérique. Système analogique. État comparatif de la description temporelle	130
1. La relation entrée-sortie : description	130
2. Conditions initiales nécessaires à la résolution de l'équation	131
3. Les valeurs initiales habituellement disponibles en pratique	131
4. Détermination des conditions initiales	133
5. Utilisation des transformations	133
6. Représentation fonctionnelle dite représentation d'état ..	134
7. Schémas fonctionnels de représentation	135
Chap. 17. Réponse d'un système analogique	136
1. Résolution de l'équation différentielle du premier ordre ..	136
2. Réponse impulsionnelle d'un système (S.L.T.I.)	138
3. Recherche des conditions initiales	140
4. Utilisation de la transformée de Laplace	141
Chap. 18. Réponse d'un système numérique	144
1. Résolution de l'équation récurrente du premier ordre ..	144
2. Réponse impulsionnelle d'un S.L.T.I. du premier ordre ..	146
3. Exemples	147
4. Systèmes d'équations récurrentes. Équations d'état	148
5. Utilisation de la transformation $\mathcal{Z}$	150
Complément. Résolution numérique des équations différentielles	152
1. Discrétisation d'une fonction	152
2. Méthode de Runge-Kutta	152
3. Méthode de l'équation d'état	156

5^e partie : Approche moderne des systèmes

Chap. 19. Introduction aux variables d'état	157
1. Notion d'état	158
2. Variables et équations d'état	161

Chap. 2

Chap. 26.

Chap. 20.	Généralisation et résolution de l'équation d'état : système discret-système continu	166
1. Système discret (système numérique)		166
2. Système continu (système analogique)		173
Chap. 21.	Système échantillonné	182
1. Discrétisation d'un processus continu		182
2. Équation d'état. Obtention des matrices F et G		183
3. Exemple		186
Chap. 22.	Les diverses représentations d'un système-comparaison	190
1. Formulation d'état à partir de l'équation aux différences		191
2. Formulation d'état à partir de la fonction de transfert discrète		194
3. Cas des systèmes continus		195
4. Tableaux résumés des principales relations		197
Chap. 23.	Introduction aux signaux aléatoires	203
1. Densité de probabilité. Fonction de répartition		203
2. Moyenne. Variance		205
3. Lois de distribution		206
4. Extension aux variables aléatoires à plusieurs dimensions		207
Chap. 24.	Courbes expérimentales. Méthode des moindres carrés	211
1. Exposé du problème		211
2. Résolution du problème		212
3. Exemple : la régression linéaire		214
4. Quelques considérations statistiques		215
6 ^e partie : Technologie des systèmes pilotés par ordinateur		
Chap. 25.	Codage de l'information numérique. Format des données ...	217
1. L'information numérisée		217
2. La numération		219
3. Le codage binaire		220
Chap. 26.	Acquisition et traitement de données. Liaisons	225
1. L'organe de traitement. Microprocesseur		225
2. Les sorties capteur. Le standard 4-20 mA		228

3. Les composants de l'acquisition et de la conversion ...	229
4. Les liaisons de communication : RS 232, RS 422, le bus IEEE 488	234
* Annexe : Transformée de Laplace	238
Transformée en z	241
Réponse impulsionnelle	242

Un
fréquer
paramè
Le s

t est une
s(t) e
s(t), 1
proportio
proportio

1^{re} PARTIE

DESCRIPTION DES SIGNAUX

CHAPITRE 1

LE SIGNAL DÉCRIT PAR UNE FONCTION

1. LE SIGNAL ANALOGIQUE

Une grandeur physique, traduite par un capteur sous la forme de plus en plus fréquente d'un signal électrique (tension ou courant), dépend d'un ou plusieurs paramètres, communément elle dépend du temps.

Le signal sera alors une fonction s

$$s : t \mapsto s(t)$$

t est une variable continue réelle représentant le temps.

$s(t)$ est un nombre réel (parfois complexe, $s^*(t)$ étant son conjugué).

$s(t)$, porteur d'information, est aussi porteur d'énergie; la puissance est proportionnelle à $s^2(t) = [s(t) \cdot s^*(t)]$ et l'énergie sur un intervalle $[t_1, t_2]$ sera proportionnelle à $\int_{t_1}^{t_2} s^2(t) \cdot dt$.

2. LE SIGNAL NUMÉRIQUE

Lorsque le paramètre dont dépend la grandeur physique est discret, le signal est dit « numérique ». C'est une fonction s

$$s : k \mapsto s(k)$$

k est un entier (positif ou négatif).

Par exemple, s est la fonction qui représente les gains d'un jeu. $s(1)$, $s(2)$... seront les nombres qui mesurent ces gains à l'issue de la 1^{re}, puis de la 2^e partie...

Lorsque la variable représente des « instants » c'est-à-dire des valeurs discrètes ($t_1, t_2, \dots$) du temps, on parle de signal échantillonné.

Couramment, une horloge cadence le temps au pas régulier Δ , d'où le signal échantillonné $s(k\Delta)$.

La température d'un malade, relevée chaque demi-journée, est un signal échantillonné.

La courbe en forme de dents de scie, obtenue en joignant les points, est un signal analogique « reconstruit ».

La température réelle du malade ne suit pas forcément la température reconstruite. Il n'y a coïncidence qu'aux instants d'échantillonnage.

La perte d'information par échantillonnage est irréparable. Il est essentiel d'avoir conscience de l'erreur et de savoir en évaluer l'ordre de grandeur (différence entre valeur réelle et valeur estimée par reconstruction).

3. LES SIGNAUX DÉFINIS PAR UNE SOMME

3.1. Signaux analogiques définis par une intégrale

Le propre d'un signal, c'est d'agir sur des appareils, le premier d'entre eux étant d'ailleurs l'appareil qui sert à mesurer le signal.

Le signal initial produit d'autres signaux qui se présentent très souvent sous forme d'intégrales. Les systèmes physiques sont... des intégrateurs.

Ainsi

$$F : t \mapsto F(t) = \int_{t_0}^t f(x) \cdot dx$$

ou bien $F(t) = \int_{t_0}^t f(x) \cdot g(x) dx$ qui traduit l'interaction de signaux.

3.2. Signal numérique défini par une somme

$$G : k \mapsto G(k) = \sum_{i=t_0}^{i=k} g(i)$$

procède de la même démarche, et traduit l'effet d'accumulation.

3.3. Approche intégrale

L'intégrale

L'intervalle Δ .

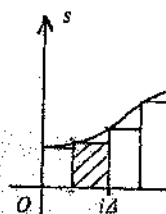
$$x = i\Delta, i$$

La méthode d'intervalle de Δ intervalles si

Deux cas

La méthode est de l'ordre

La méthode est de l'ordre de



I_1

a)

Approche

Les sommes

a) $I_1(i) = \dots$

b) $I_2(i) = i$

c) $I_3(i) = i$

Le calcul e

3.3. Approche d'une intégrale par une somme, intégration à l'ordinateur

L'intégrale est $I(t_0) = \int_0^{t_0} s(x) dx$; elle est à évaluer numériquement.

L'intervalle d'intégration $[0, t_0]$ est partagé en k_0 intervalles de durée identique Δ .

$x = i\Delta$, i est un indice courant entier.

La méthode générale consiste à approcher s par un polynôme P_n , sur un intervalle donné. L'intégration est alors aisée, et on ajoute les résultats des intervalles successifs.

Deux cas particuliers, très simples, sont à retenir.

La méthode des rectangles : P_n est de degré zéro, l'erreur cumulée commise est de l'ordre de Δ .

La méthode des trapèzes : P_n est de degré un, l'erreur cumulée commise est de l'ordre de Δ^2 .

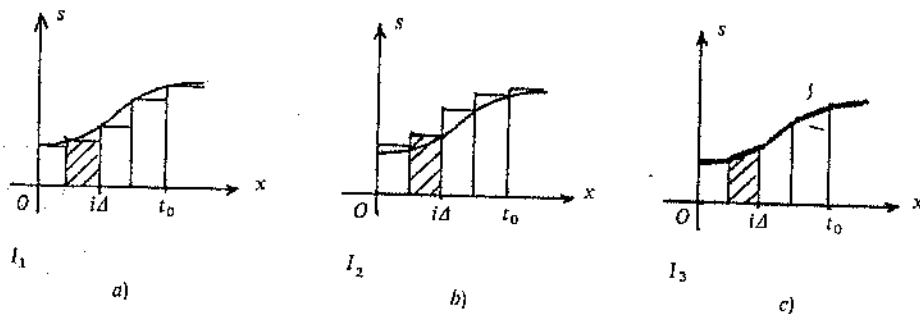


Fig. 1.1.

Approchons $I(t_0)$ par une somme discrète.

Les sommes s'expriment de manière récursive (fig. 1.1) :

a) $I_1(i) = I_1(i-1) + \Delta \cdot s(i-1)$ i varie de 1 à k_0 et $I(0) = 0$

b) $I_2(i) = I_2(i-1) + \Delta \cdot s(i)$

c) $I_3(i) = I_3(i-1) + \frac{\Delta}{2} \cdot [s(i) + s(i-1)]$

Le calcul est aisé à programmer. Voici par exemple pour I_1 .

début

$I_1(0) := 0$

Pour ($i := 1$ à $i := k_0$) faire

• lire $s(i-1)$

• $I_1(i) := I_1(i-1) + \Delta \cdot s(i-1)$

Écrire $I_1(k_0)$

fin

4. LES SIGNAUX DÉFINIS PAR UNE DIFFÉRENCE

4.1. Signaux analogiques définis par une dérivée

De nombreuses lois physiques apparaissent sous forme différentielle. $\dot{s}$ est la fonction dérivée de s ; $\dot{s}$ est, en un point t , la limite d'une différence :

$$\dot{s}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

4.2. Signaux numériques définis par une différence

Nous définissons deux fonctions « différences finies »

fonction Ag : $k \mapsto Ag(k) = g(k+1) - g(k)$ forme « avancée »

fonction Rg : $k \mapsto Rg(k) = g(k) - g(k-1)$ forme « retardée »

4.3. Approche d'une dérivée par une différence finie

Tout comme l'intégrale est approchée par une somme, la dérivée sera, au prix d'une erreur, approchée par une différence.

La méthode générale esquissée pour les intégrales s'applique à la dérivée. $s(k)$ est approché par un polynôme P_n , qu'on sait alors très bien dériver.

Deux cas particuliers très évidents sont à retenir, qui d'ailleurs vont correspondre aux 2 cas vus pour l'intégrale.

P_n de degré 1, l'erreur commise est de l'ordre de Δ

$$\dot{s}(k\Delta) \simeq \frac{s((k+1)\Delta) - s(k\Delta)}{\Delta}, \quad \text{ou} \quad \dot{s}(k\Delta) \simeq \frac{s(k\Delta) - s((k-1)\Delta)}{\Delta}$$

P_n de degré 2, l'erreur commise est de l'ordre de Δ^2

$$\dot{s}(k) \simeq \frac{s(k+1) - s(k-1)}{2\Delta},$$

nous avons écrit k au lieu de $k\Delta$ pour alléger.

LE SIGNAL DÉCRIT PAR UNE DISTRIBUTION

INITIATION A LA THÉORIE DES DISTRIBUTIONS

Dans les années 1950, Laurent Schwartz met au point la théorie des distributions sous sa forme actuelle,

Avant lui, Heaviside (1900) avec le calcul symbolique, puis Dirac (1926), avec la « fonction impulsion » et Sobolev qui, dix ans plus tard, tente une généralisation de la notion de fonction, se sont interrogés sur les problèmes de mesure.

Pour illustrer notre propos examinons quelques exemples simples,

Premier exemple (fig. 2.1)

Le circuit est sans résistance. (Cette modélisation mathématique n'est pas extravagante, la mise au point des supraconducteurs rapproche la réalité physique de ce modèle.)

A l'instant $t = 0$ on bascule l'inverseur sur la batterie.

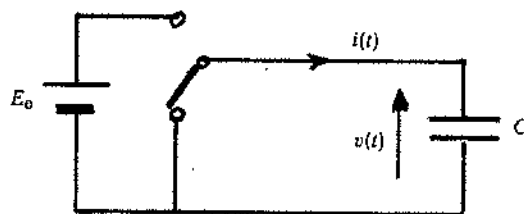


Fig. 2.1.

La tension aux bornes du condensateur vaut donc

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ E_0 & t > 0 \end{cases}$$

on ne peut définir $v(t)$ pour $t = 0$, et il n'est pas indispensable que $v(0)$ soit définie.

Cherchons alors le courant $i(t)$.

Il vaut $C \cdot \frac{dv}{dt}$. Il est donc nul tout le temps, excepté pour $t = 0$ où nous ne savons pas le calculer, puisque nous ne savons pas dériver une fonction discontinue. C'est une première difficulté.

Pourtant $i(t)$ existe en $t = 0$ puisqu'il y a eu transfert de la charge (CE_0) depuis la batterie jusqu'au condensateur.

Bien que $i(t)$ ne soit pas accessible, on a une certitude, c'est la valeur de la charge q déposée sur le condensateur.

q peut s'envisager comme l'intégrale de l'intensité puisque $i(t) = \frac{dq}{dt}$.

$$q = \int_{-\infty}^{+\infty} i(t) \cdot dt = CE_0.$$

Il apparaît une deuxième difficulté. L'intégrale (de Riemann) de la « fonction » $i(t)$ presque partout nulle, n'est pas nulle.

$i(t)$ n'est pas une fonction.

Deuxième exemple (plus mathématique) (fig. 2.2)

Nous verrons que la transformée de Fourier de la fonction créneau de durée T existe, quel que soit T .

T peut être aussi grand que voulu mais il doit être fini.

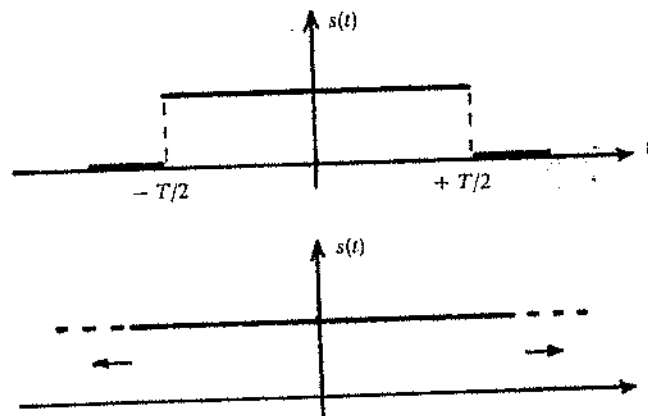


Fig. 2.2.

Si on fait tendre T vers l'infini, le créneau devient une constante, mais la transformée ne tend vers aucune limite.

La transformée de Fourier d'une constante n'existe pas dans l'espace des fonctions, le passage à la limite ne peut pas s'effectuer correctement.

Pour la troisième fois apparaît une grave difficulté, cette fois au voisinage de l'infini.

La notation modéliser ces signaux familiers.

On va à l'infini.

Une fonction fait correspondre

Une distribution de départ, fin

Ce nom est

L'ensemble

soigneusement

précises.

On peut

l'ensemble

$[0, 1]$; le point

$\langle T, \theta \rangle$

2. L'INFINI

Les fonctions

ensemble ne

Les fonctions

qui confèrent

1^{re} règle.

2^e règle.

3^e règle.

Dans $\mathcal{D}$,

distances

tendent vers

Schwartz

1. DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES QU'EST-CE QU'UNE DISTRIBUTION?

La notion de fonction, nous venons de le constater, ne convient pas pour modéliser certaines propriétés, ou des signaux physiques pourtant simples, voire familiers.

On va alors parler de « distribution ».

Une fonction f est un « procédé » qui, à tout nombre d'un ensemble de départ, fait correspondre un autre nombre d'un ensemble d'arrivée.

Une distribution T est un « procédé » qui, à toute fonction φ d'un ensemble de départ, fait correspondre un nombre.

Ce nombre sera noté $\langle T, \varphi \rangle$ de préférence à $T(\varphi)$.

L'ensemble fonctionnel de départ n'est pas quelconque, il sera même soigneusement défini; et le procédé doit obéir à un certain nombre de règles précises.

On peut citer un tel procédé T :

l'ensemble de départ est constitué des fonctions θ intégrables sur l'intervalle $[0, 1]$; le procédé T est celui qui associe, à la fonction θ , le nombre réel noté $\langle T, \theta \rangle$

$$\langle T, \theta \rangle = \int_0^1 \theta(t) dt$$

2. L'ENSEMBLE $\mathcal{D}$ DES FONCTIONS DE DÉPART

Les fonctions φ sur lesquelles opèrent les distributions T appartiennent à un ensemble noté $\mathcal{D}$.

Les fonctions φ obéissent à des règles sévères, ce sont précisément ces règles qui confèrent aux distributions T des propriétés remarquables.

1^{re} règle. Les fonctions φ sont nulles en dehors d'un intervalle Ω .

2^e règle. Les fonctions φ sont indéfiniment dérivables.

3^e règle. $\mathcal{D}$, ensemble des fonctions φ , est muni d'une norme qui permet de mesurer la « distance » de deux fonctions, $\|\varphi_2 - \varphi_1\|$.

Dans $\mathcal{D}$, une suite φ_n de fonctions converge vers φ implique que toutes les distances

$$\|\varphi_n - \varphi\|, \quad \|\dot{\varphi}_n - \dot{\varphi}\|, \quad \dots \quad \|\varphi_n^{(p)} - \varphi^{(p)}\|$$

tendent vers zéro quand n tend vers l'infini.

Schwartz a réussi à exhiber une telle fonction φ (fig. 2.3)

$$\varphi : t \rightarrow \varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| \geq a \\ e^{-\frac{a^2}{a^2-t^2}} & \text{si } |t| < a \end{cases}$$

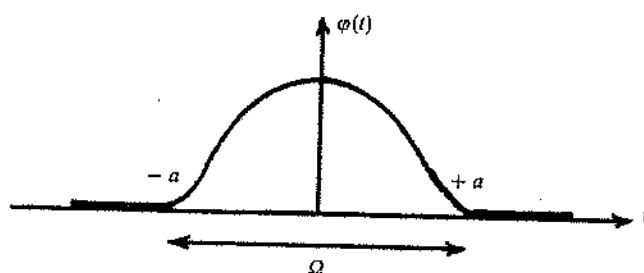


Fig. 2.3.

On vérifie que le «raccord» aux points $+a$ et $-a$ est sans cassure et que φ se dérive bien partout et notamment en ces deux points, et cela indéfiniment.

3. DÉFINITION D'UNE DISTRIBUTION SUR $\mathcal{D}$

Une distribution sur $\mathcal{D}$ est un procédé T , linéaire et continu, qui à toute fonction de $\mathcal{D}$ associe le nombre noté $\langle T, \varphi \rangle$

Linéaire implique que $\langle T, a\varphi_1 + b\varphi_2 \rangle = a\langle T, \varphi_1 \rangle + b\langle T, \varphi_2 \rangle$

Continu implique que si $\varphi_n \rightarrow \varphi$ dans $\mathcal{D}$, $\langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$ dans $\mathbb{R}$.

3.1. Exemple 1

Soit f une fonction continue et «localement sommable», ce qui signifie que son intégrale sur n'importe quel intervalle fini existe.

Nous allons définir à l'aide de f , une distribution notée $[f]$ qui à $\varphi \in \mathcal{D}$ associe le nombre

$$\langle [f], \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \varphi(t) dt.$$

Les propriétés de f et surtout de φ (qui est nulle sauf sur un intervalle fini) assurent l'existence de l'intégrale qui est bien sûr un procédé linéaire et dont on démontre qu'il est aussi continu.

$[f]$ (à ne pas confondre avec f) est dite distribution régulière.

3.2. Exemple 2

Soit T la distribution qui à φ associe le nombre $\langle T, \varphi \rangle = \varphi(0)$
 T est la distribution de Dirac δ : $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$

Il n'exis

C'est po
On défi

4.

Nous av
et définies p
Dirac δ ou δ

Ceci entr

• Confor
• Définir
le procédé sc

$\int$

Ces abus
néanmoins co

5.1. Égalité

$$T_1 = T_2$$

5.2. Produit

g est une f

$$g \cdot T = T$$

Le produit
(on note que
la linéarité et l

Il n'existe pas de fonction δ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot \varphi(t) dt = \varphi(0)$

C'est pourquoi δ est dite singulière.

On définit δ_a telle que $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$

4. LES CONVENTIONS DES PHYSICIENS : MISES EN GARDE

Nous avons vu des distributions régulières $[f]$ associées à certaines fonctions et définies par une intégrale, et des distributions singulières du type de celle de Dirac δ ou δ_a qui ne correspondent pas à une fonction.

Ceci entraîne deux types de confusions :

- Confondre f et $[f]$, c'est-à-dire fonction et distribution.
- Définir δ comme distribution associée à une fonction $\delta(t)$ et donc d'écrire le procédé sous la forme intégrale propre aux distributions régulières :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot \varphi(t) dt = \varphi(0); \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a) \cdot \varphi(t) dt = \varphi(a)$$

Ces abus, qui rendent certains raisonnements incompréhensibles sont néanmoins commodes dans l'écriture formelle. Nous les commettrons aussi.

5. QUELQUES PROPRIÉTÉS UTILLES EN THÉORIE DU SIGNAL

5.1. Égalité de deux distributions T_1 et T_2

$$T_1 = T_2 \quad \text{si} \quad \langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

5.2. Produit d'une fonction g par une distribution T

g est une fonction indéfiniment dérivable.

$g \cdot T = T \cdot g$ est une distribution; elle est définie par

$$\langle gT, \varphi \rangle = \langle Tg, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle \quad (2.1)$$

Le produit des deux fonctions $g \cdot \varphi$ est le produit classique de deux fonctions (on note que $g \cdot \varphi \in \mathcal{D}$). Le nombre $\langle T, g\varphi \rangle$ existe parfaitement; il définit, la linéarité et la continuité étant supposées démontrées, la distribution $g \cdot T$.

Appliquons cette définition à la distribution de Dirac δ . Formons la distribution $g \cdot \delta$, notée improprement $g(t) \cdot \delta(t)$, il vient :

$$\begin{aligned} \langle g\delta, \varphi \rangle &= \langle \delta, g\varphi \rangle = g(0) \cdot \varphi(0) \\ &= g(0) \langle \delta, \varphi \rangle = \langle g(0)\delta, \varphi \rangle \quad (\text{d'après la linéarité}). \end{aligned}$$

Donc $g \cdot \delta = g(0) \cdot \delta$

$g(0)$ est « l'échantillon » prélevé par la distribution de Dirac.

La représentation de $\delta(t)$ (impropre) illustre bien cet effet d'échantillonnage (fig. 2.4). On note aussi $g(t)\delta(t) = g(0)\delta(t)$

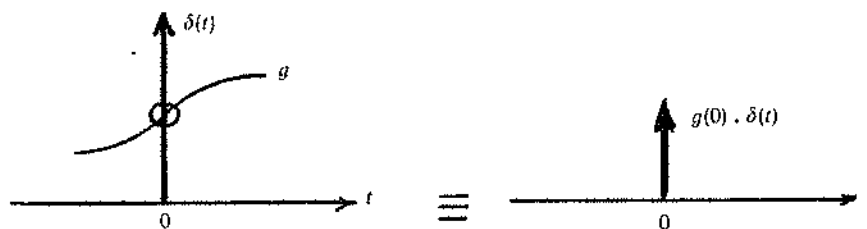


Fig. 2.4.

$g(0)$ sera nommé « poids » ou « mesure » de Dirac.

5.3. Remarque

L'équation $t \cdot T = S$ où S est une distribution régulière n'a pas pour solution $T = \frac{1}{t} \cdot S$, mais $T = \frac{1}{t} \cdot S + k \cdot \delta(t)$

En effet $t \cdot T = 0$ admet pour solution, non pas $T = 0$ mais $T = k \cdot \delta(t)$ car, d'après le § 5.2, $t \cdot \delta(t) = 0$ ($t \cdot \delta(t)$ représente l'échantillonnage de la fonction t en 0, fig. 2.5).

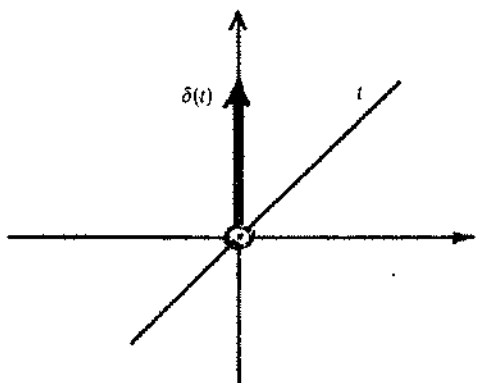


Fig. 2.5.

Donc $(t \cdot T - S) = 0$ s'écrit $t \cdot \left(T - \frac{S}{t}\right) = 0$ qui donne

$$T - \frac{S}{t} = k\delta(t) \quad \text{d'où} \quad T = \frac{S}{t} + k\delta(t) \quad (2.2)$$

k est déterminé par le contexte.

$T = \frac{1}{t} S + k\delta$ est l'écriture incorrecte d'une relation correcte qui fait intervenir la pseudo-fonction $pf\left(\frac{1}{t}\right)$.

6. DÉRIVÉE D'UNE DISTRIBUTION

6.1. Définition

La dérivée T' , de la distribution T est définie à priori par le procédé

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle \quad (2.3)$$

Comme φ est indéfiniment dérivable, T l'est aussi.

La définition peut paraître artificielle... elle ne l'est pas.

Elle a été conçue pour que les distributions régulières issues de fonctions puissent être dérivées comme les fonctions.

Comme φ' existe, une distribution T a donc, par définition, toujours une dérivée (ce qui n'est pas le cas des fonctions).

6.2. Dérivée d'une distribution régulière : 1^{er} cas

Soit f une fonction partout dérivable, $[f]$ la distribution régulière associée.

La dérivée $[f]'$ de $[f]$ (ne pas confondre avec f') est telle que :

$$\langle [f]', \varphi \rangle = \langle -[f], \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \varphi'(t) \cdot dt$$

En intégrant par parties, il vient

$$\langle [f]', \varphi \rangle = - [f(t) \cdot \varphi(t)]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) \cdot \varphi(t) dt.$$

Mais le 1^{er} terme du 2^e membre est nul car $\varphi = 0$ à l'infini. L'intégrale définit la distribution associée à f' , on a :

$$\langle [f]', \varphi \rangle = \langle [f'], \varphi \rangle \quad \forall \varphi \quad \text{donc} \quad [f]' = [f']$$

Dans ce cas, la dérivée de la distribution est la distribution associée à la dérivée.

6.3. Dérivée d'une distribution régulière : 2^e cas

Soit f une fonction qui n'est pas dérivable en a , f est discontinue au point a (fig. 2.6 a).

La distribution $[f]$ existe car f est localement sommable.

Sa dérivée $[f]'$ existe aussi puisque toutes les distributions sont dérivables.

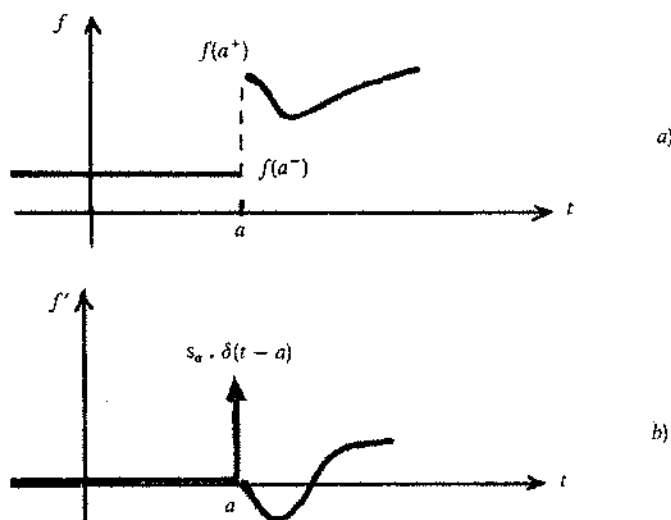


Fig. 2.6.

D'après (2.3) on a :

$$\begin{aligned} \langle [f]', \varphi \rangle &= - \langle [f], \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \varphi'(t) dt \\ &= - \int_{-\infty}^a f(t) \cdot \varphi'(t) dt - \int_a^{+\infty} f(t) \cdot \varphi'(t) dt. \end{aligned}$$

En intégrant par parties chaque intégrale :

$$= - [f \cdot \varphi]_{-\infty}^a + \int_{-\infty}^a f'(t) \cdot \varphi(t) dt + \int_a^{+\infty} f'(t) \cdot \varphi(t) dt - [f \cdot \varphi]_a^{+\infty}$$

$\varphi(t)$ est nulle à l'infini et continue en a ; $f(a)$ n'existe pas, il faut donc prendre selon le cas $f(a^-)$ ou $f(a^+)$ (écriture habituelle des limites).

f' existe partout sauf en un point, ce qui ne gêne en rien l'intégration; on a donc :

$$\begin{aligned} \langle [f]', \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) \cdot \varphi(t) dt - f(a^-) \cdot \varphi(a) + f(a^+) \cdot \varphi(a) \\ &= \langle [f]', \varphi \rangle + [f(a^+) - f(a^-)] \cdot \varphi(a) \end{aligned}$$

Mais

où s_a est l
Cette

En pr
Si une
« ordinaire
discontinu
(2.4) es
sans doute

6.4. Que

• Soit

D'après
 Γ' est l
écrite Γ'
distribution

• δ est

• $g \cdot \delta$

Nous a
En déri

7. TRAN

7.1. Tran

Soit g
qui est la t

(*) Peut être

Mais on sait (§ 4) que $\varphi(a) = \langle \delta(t-a), \varphi \rangle$ (notation impropre) donc

$$\langle [f]', \varphi \rangle = \langle [f'], \varphi \rangle + s_a \cdot \langle \delta(t-a), \varphi \rangle$$

où s_a est le saut de f en a , $s_a = f(a^+) - f(a^-)$

Cette égalité, vraie quelle que soit φ entraîne donc

$$[f]' = [f'] + s_a \cdot \delta(t-a) \quad (2.4)$$

En pratique, cette relation sera comprise de la manière simple suivante :

Si une fonction est discontinue en a , sa « dérivée » est égale à la dérivée « ordinaire », augmentée des impulsions de Dirac qui apparaissent aux discontinuités et dont le poids est le saut de la fonction.

(2.4) est une égalité entre distributions et non entre fonctions, c'est pourquoi sans doute les Anglo-saxons parlent de fonctions singulières.

6.4. Quelques applications remarquables

- Soit Γ la fonction échelon d'Heaviside $\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$

D'après (2.4) on a : $[\Gamma]' = [0] + 1 \cdot \delta(t)$ puisque $\Gamma' = 0$

Γ' est la dérivée ordinaire d'une fonction (constante). Cette relation souvent écrite $\Gamma' = \delta(t)$ indique donc que la distribution d'Heaviside a pour dérivée la distribution de Dirac.

- δ est une distribution, elle est donc dérivable, sa dérivée δ' est telle que

$$\langle \delta', \varphi \rangle = - \langle \delta, \varphi' \rangle = - \varphi'(0) \quad (2.5)$$

- $g \cdot \delta$ est une distribution (g est une fonction), sa dérivée $[g \cdot \delta]'$ existe.

Nous avons vu au § 5.2 que $g \cdot \delta = g(0) \cdot \delta(t)$.

En dérivant ce produit, il vient

$$[g \cdot \delta]' = g(0) \cdot \delta' \quad \delta' \text{ a été définie en (2.5).}$$

7. TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UNE DISTRIBUTION (*)

7.1. Transformée de Fourier d'une fonction g (voir chap. 10)

Soit g une fonction de la variable t . On définit (sous réserve d'existence) $\widehat{g}$ qui est la transformée de Fourier de g , $\widehat{g}$ est une fonction de la variable f .

$$\widehat{g}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

(*) Peut être repris après l'étude du chapitre 10 et sauté en 1^{re} lecture.

Si g est une fonction sinus, ou rampe ou simplement l'échelon d'Heaviside, l'intégrale ne converge pas et $\widehat{g}$ n'existe pas.

Nous allons montrer que $\widehat{[g]}$ existe, si on prend la distribution $[g]$ associée à la fonction g .

7.2. Extension du domaine $\mathcal{D}$ au domaine $\mathcal{S}$

Les fonctions φ de l'espace fonctionnel $\mathcal{D}$ sont soumises à des conditions très sévères et notamment elles doivent être nulles en dehors d'un intervalle.

Considérons le domaine $\mathcal{S}$ des fonctions ψ qui sont des fonctions indéfiniment dérivables et à décroissance rapide à l'infini (c'est-à-dire à décroissance plus rapide que $\frac{1}{t^n} \quad \forall n > 0$).

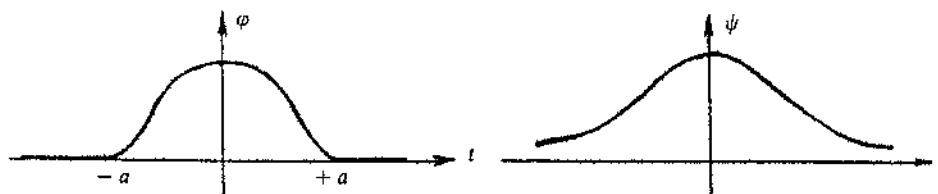


Fig. 2.7.

Par exemple $\psi(t) = e^{-t^2}$ convient et appartient à $\mathcal{S}$ (fig. 2.7).

Les exigences sur ψ sont moins sévères que celles sur φ .

Nous verrons (chap. 10, § 2) que la transformation de Fourier a un effet d'élargissement des fonctions.

Ainsi, si $\varphi \in \mathcal{D}$, $\widehat{\varphi} \notin \mathcal{D}$
par contre si $\psi \in \mathcal{S}$, alors $\widehat{\psi} \in \mathcal{S}$ également.

On verra (§ 7.5) que la définition de la transformée de Fourier s'appuie sur cette propriété.

7.3. Les distributions sur $\mathcal{S}$ (appelées aussi tempérées)

Une distribution sur $\mathcal{S}$ est un procédé T qui à ψ associe le nombre noté $\langle T, \psi \rangle$.

Si T est construite à partir d'une fonction f , $T = [f]$ selon nos conventions, le procédé est l'intégrale

$$\langle [f], \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \psi(t) \cdot dt.$$

Bien entendu, toutes les fonctions f n'assurent pas la convergence de cette intégrale et ne sont pas des distributions tempérées.

Puisq
(au plus
Les
distribu
génétrai
Ainsi
distribu
e' ne l

7.5. Dé

Si on

Tout c
choisie (**
[s] coïnci

et lorsque

Ainsi, l
des foncti
formée, pu
possibilités
au début c

(**) Soit
Nous lui
 $\langle [s], \widehat{\psi} \rangle = \int$

donc, en repo

et comme les

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \\ &= \langle [s], \psi \rangle \\ \text{Donc } \langle [s] \end{aligned}$$

Puisque ψ est à décroissance rapide, seules les fonctions f à croissance lente (au plus t^n) assurent l'existence de l'intégrale et donc de la distribution $[f]$.

Les distributions tempérées (sur $\mathcal{S}$) sont donc un sous-ensemble des distributions (sur $\mathcal{D}$). Les fonctions à croissance lente sont les fonctions génératrices des distributions tempérées.

Ainsi $\sin t$, $\Gamma(t)$, sont des fonctions qui permettent de construire les distributions tempérées correspondantes.

e^t ne le permet pas.

7.5. Définition de la transformée de Fourier d'une distribution T

Si on la note $\widehat{T}$ on a, par définition, $\widehat{T}$ qui vérifie :

$$\langle \widehat{T}, \psi \rangle = \langle T, \widehat{\psi} \rangle, \quad \psi \text{ et } \widehat{\psi} \text{ sont dans } \mathcal{S}.$$

Tout comme pour la dérivée, cette définition n'est pas arbitraire. Elle a été choisie (**) de telle sorte que la transformée de Fourier au sens des distributions $[s]$ coïncide avec la transformée au sens des fonctions $[\widehat{s}]$ lorsque $\widehat{s}$ existe :

$$[\widehat{s}] = [\widehat{s}]$$

et lorsque $\widehat{s}$ n'existe pas (s est par exemple un échelon)

$[\widehat{s}]$ n'existe pas, bien sûr, mais $[\widehat{s}]$ existe.

Ainsi, la théorie des distributions « donne un sens » à la transformée de Fourier des fonctions à croissance lente, qui n'ont pas, au sens des fonctions, de transformée, puisque l'intégrale de définition ne converge pas. Cela élargit donc nos possibilités en donnant une réponse aux trois questions que nous avons posées au début de ce chapitre.

(**) Soit s une « bonne » fonction, c'est-à-dire qui admet une transformée $\widehat{s}$.

Nous lui associons la distribution $[s]$; formons alors $\langle [s], \widehat{\psi} \rangle$

$\langle [s], \widehat{\psi} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s(x) \cdot \widehat{\psi}(x) dx$, mais la transformée $\widehat{\psi}$ de la fonction ψ vaut, par définition :

$$\widehat{\psi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) \cdot e^{-j2\pi xy} dy$$

donc, en reportant cette valeur on a :

$$\langle [s], \widehat{\psi} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s(x) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) \cdot e^{-j2\pi xy} dy \right) dx;$$

et comme les intégrales existent on peut permuter l'ordre des intégrations, ce qui conduit à

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} s(x) \cdot e^{-j2\pi xy} dx \right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) \cdot \widehat{s}(y) dy \quad \text{car l'intégrale intérieure définit la transformée de } s.$$

$$= \langle [\widehat{s}], \psi \rangle \quad \text{par définition de la distribution associée à la fonction } \widehat{s}.$$

$$\text{Donc } \langle [s], \widehat{\psi} \rangle = \langle [\widehat{s}], \psi \rangle \quad \forall \psi \quad \text{d'où } [\widehat{s}] = [\widehat{s}].$$

Nous démontrerons ainsi (chap. 11, § 4) que la transformée de Fourier d'une sinusoïde est formée de deux Dirac.

En toute rigueur il faut dire, que la transformée de la distribution tempérée associée à la fonction sinus, est formée de deux distributions de Dirac.

? Exemple de calcul

Recherche de la transformée de la distribution de Dirac.

$\widehat{\delta}$ est telle que : $\langle \widehat{\delta}, \psi \rangle = \langle \delta, \widehat{\psi} \rangle = \widehat{\psi}(0)$ mais

$$\widehat{\psi}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{donc} \quad \widehat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \cdot 1 dt = \langle [1], \psi \rangle$$

Ainsi $\langle \widehat{\delta}, \psi \rangle = \langle [1], \psi \rangle$ quel que soit ψ .

Donc $\widehat{\delta} = [1]$.

Les physiciens donnent de cela une représentation (incorrecte mais commode) au sens des fonctions.

La transformée de la «fonction impulsion» est la «fonction» constante $UN(f) = \widehat{\delta}(f)$.

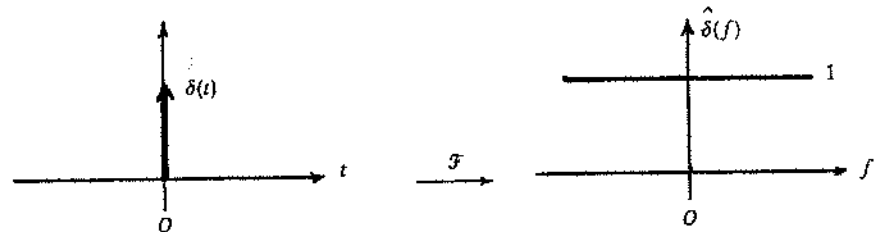


Fig. 2.8.

TEM

E

Un système
(boîte noire). Il
Les signaux
son comporten
Les système
Un four (en
continu analogi
Une loterie
est un système
Un voltmètr
est un système
Les signaux

2^e PARTIE

REPRÉSENTATION TEMPORELLE DES SIGNAUX ET DES SYSTÈMES A TEMPS CONTINU ET A TEMPS DISCRET

CONVOLUTION

Un système est un ensemble fonctionnel, circonscrit dans une enveloppe (boîte noire). Il communique avec l'extérieur à l'aide de signaux.

Les signaux d'entrée permettent de l'exciter, les signaux de sortie d'observer son comportement.

Les systèmes monovariables sont à une seule entrée et une seule sortie.

Un four (entrée : débit de gaz, sortie : température) est un système à temps continu analogique.

Une loterie (entrée : la mise du joueur en début de partie, sortie : son gain) est un système numérique.

Un voltmètre numérique (entrée : tension à mesurer, sortie : tension affichée) est un système mixte, c'est un système échantillonné.

Les signaux temporels sont dits causals s'ils sont nuls pour $t < 0$.

Applique
avant, puis
 E_0 la tension
la durée ε fi
la tension, i

CHAPITRE 3

LES SIGNAUX A TEMPS CONTINU

1. LA RAMPE UNITAIRE $r(t)$, CAUSALE (fig. 3.1)

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \text{ (causalité)} \\ t & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

En physique, la pente est rarement 1.
Elle exprime la vitesse de variation de la grandeur considérée.

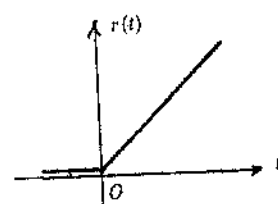


Fig. 3.1.

$\theta(t) = a \cdot r(t)$; $a = 0,2$ degré par seconde exprime par exemple la croissance linéaire de la température d'un four.

2. L'ÉCHELON UNITAIRE $\Gamma(t)$, Fonction d'Heaviside (fig. 3.2)

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \text{ (causalité)} \\ 1 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

$\Gamma(t)$ est la dérivée (discontinue à l'origine) de $r(t)$;
 $\Gamma(t)$ n'est pas définie pour $t = 0$.
 $\Gamma(0^+) = 1$ et $\Gamma(0^-) = 0$.

En fait

3. L'

Dérivon

$$\left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2} \right]$$

On observe

Si on fait
mais au sens
 δ est la

$$\frac{1}{\varepsilon}$$

Appliquons une tension continue à un système. La tension est bien connue avant, puis après la fermeture en $t = 0$ de l'interrupteur. Si son amplitude est E_0 la tension sera un échelon non unitaire $E_0 F(t)$. On peut être tenté d'exprimer la durée ε finie de fermeture de l'interrupteur et la continuité de l'évolution de la tension, ici en outre linéarisée, par $F_1(t)$ (fig. 3.3).

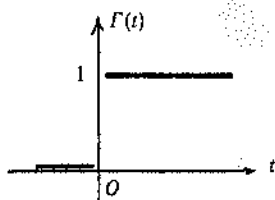


Fig. 3.2.

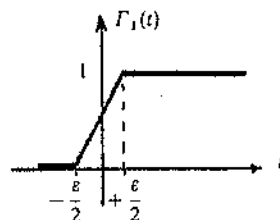


Fig. 3.3.

En fait F_1 n'est pas plus simple que F , au contraire.

3. L'IMPULSION UNITAIRE $\delta(t)$, Impulsion de Dirac

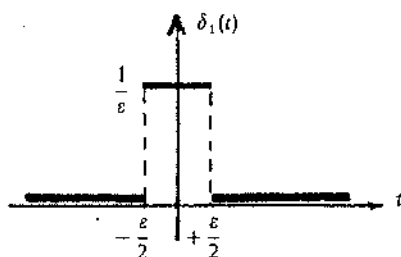
Dérivons F_1 , nous obtenons δ_1 (fig. 3.4 a) qui vaut $\frac{1}{\varepsilon}$ dans l'intervalle $\left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]$.

On observe que son aire est 1 quel que soit ε

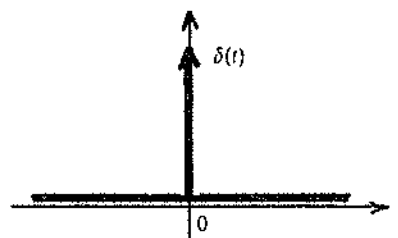
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_1(t) dt = 1 \quad \forall \varepsilon. \quad (3.1)$$

Si on fait tendre ε vers 0, δ_1 ne tend pas vers une limite au sens des fonctions, mais au sens des distributions.

δ est la distribution de Dirac (voir chap. 2) (fig. 3.4 b).



a)



b)

Fig. 3.4.

δ_1 est la dérivée de Γ_1 qui est dérivable sauf aux deux points de cassure.

Γ n'est pas dérivable en O au sens des fonctions, mais elle l'est au sens des distributions et on a :

$\delta = [\Gamma]'$; on notera souvent $\delta(t) = \Gamma'(t)$ en utilisant, à tort, le formalisme usuel des fonctions, à la place de celui des distributions.

De même, en reprenant l'intégrale vue en (3.1), on écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot dt = 1$$

qui constitue une sorte de définition de δ .

Ces écritures, ambiguës, voire inexactes, sont très répandues; elles ont le mérite d'être très commodées et l'inconvénient de prêter à confusion.

L'impulsion de Dirac $\delta(t)$ est dite unitaire car sa mesure, ou son poids, ou son aire (l'intégrale?) vaut un.

Nous démontrerons (chap. 6, § 6) qu'une impulsion brève (à préciser), de forme quelconque, peut être approchée, du point de vue de ses effets, par une impulsion de Dirac de mesure $\mathcal{A}$ (fig. 3.5).

$\mathcal{A}$ est l'aire de l'impulsion brève.

Cette manière d'opérer va simplifier les problèmes de chocs et percussions et les théories de l'échantillonnage.

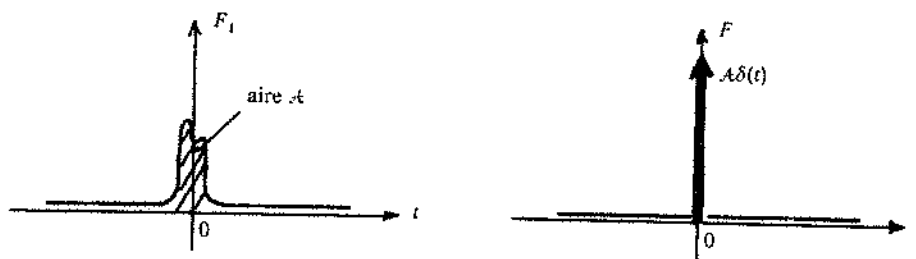


Fig. 3.5.

Exemple électrique

Le condensateur est préalablement déchargé; en $t = 0$ on applique la tension E_0 (générateur supposé parfait) (fig. 3.6).

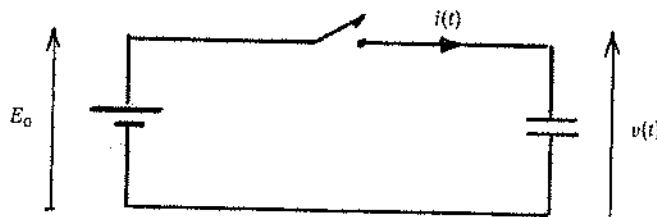


Fig. 3.6.

$v(t)$ est bien représentée par $v(t) = E_0 \cdot \Gamma(t)$, $t > 0$.

D'ap
de cour
On
parfaite

Exem
Une
L'équatic

si on adn
«l'aire» c

4. 1

Le signa
une sinusoï
intérêt très

On peut
réponse en f
On emp
manipuler.

Remarque

Le caract
décalages ter
Une avar
degrés.

Sur une f
attentivemen

D'après l'électrocinétique $i(t) = C \cdot \frac{dv}{dt} = CE_0 \cdot \delta(t)$ représente l'impulsion de courant.

On observe que $q = \int_{-\infty}^{+\infty} i(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} CE_0 \cdot \delta(t) dt = CE_0$ représente parfaitement la charge du condensateur.

Exemple mécanique

Une boule de billard est soumise au choc bref d'une autre boule (fig. 3.7). L'équation du mouvement sera bien représentée par

$$m\vec{y} = \vec{F}_0 \cdot \tau \cdot \delta(t).$$

si on admet que le choc très bref a une durée τ , la force appliquée étant $\vec{F}_0$, «l'aire» de l'impulsion est $\vec{F}_0 \cdot \tau$.

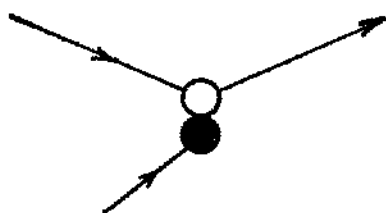


Fig. 3.7.

4. LE SIGNAL HARMONIQUE OU SINUSOÏDAL

Le signal sinusoïdal, très employé, est le signal périodique par excellence. C'est une sinusoïde éternelle (non causale). La sinusoïde causale (nulle pour $t < 0$) a un intérêt très limité.

On peut donc exciter un système par un signal-test sinusoïdal et explorer sa réponse en faisant varier la fréquence, pour observer par exemple les résonances.

On emploie aussi le signal (mathématique) $e^{j\omega t}$ beaucoup plus simple à manipuler.

Remarque

Le caractère non causal du signal harmonique ne permet pas de déduire les décalages temporels des signaux par l'observation de leur déphasage.

Une avance de phase de 60° est peut-être un retard de 300 ou $(300 + 360)$ degrés.

Sur une piste circulaire, l'observateur qui n'a pas assisté au départ ni suivi attentivement le déroulement de la course, ne peut pas savoir si le cycliste

apparemment en tête est premier ou au contraire second avec près d'un tour de retard.

Ainsi, il ne faut pas considérer un système à avance de phase comme un système « anticipatif ».

5. AUTRES SIGNAUX

5.1. Signal causal retardé (fig. 3.8)

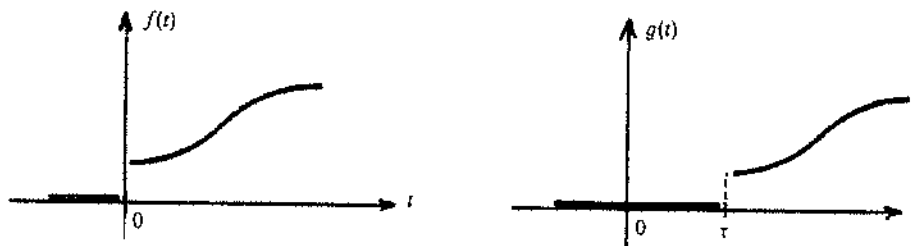


Fig. 3.8.

$$g(t) = f(t - \tau)$$

$g(t)$ est nul pour $t < \tau$

La somme de signaux causaux et de signaux retardés permet de créer des signaux de formes quelconques.

Ainsi $3\Gamma(t) - 3\Gamma(t - T_0)$ est un créneau causal de hauteur 3 et de durée T_0 .

5.2. L'impulsion gaussienne (fig. 3.9)

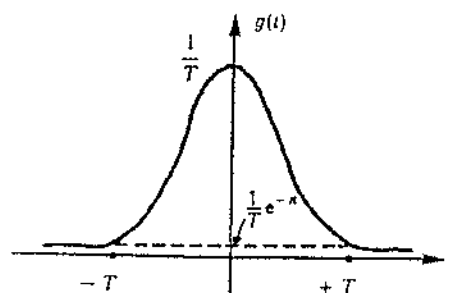


Fig. 3.9.

On démo
l'unité. On c
inférieure à «

5.3. Signal

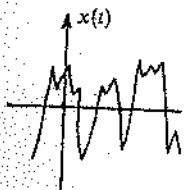
$x(t)$, signa
(fig. 3.10 a).

x est une
ses propriétés

$p(t)$ est un
dans lequel le.

Le bit d'er
 $p(t)$ est alo

d'impulsions r



a)

Les signaux

5.4. Le peign

C'est une dis

On note LL

La sommatio
retardées $\delta(t -$

(*) • Lire LL et f

(**) • Les somm

un intervalle infini.

d'un tour de
se comme un

$$g(t) = \frac{1}{T} \cdot e^{-\pi \left(\frac{t}{T}\right)^2}$$

On démontre que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$, l'aire de l'impulsion gaussienne est l'unité. On dira qu'elle a pour largeur $2T$ car au delà, l'amplitude de $g(t)$ est inférieure à 4 % du maximum.

5.3. Signal aléatoire. Signal pseudo-aléatoire

$x(t)$, signal aléatoire, ne peut être décrit à l'aide d'une expression analytique (fig. 3.10 a).

x est une variable aléatoire accessible par des épreuves, elle sera décrite par ses propriétés statistiques.

$p(t)$ est un signal pseudo-aléatoire, réalisé par exemple à l'aide d'un registre dans lequel les bits se décalent vers la droite au coup d'horloge (fig. 3.10 b et c).

Le bit d'entrée est réalisé par un « ou exclusif ».

$p(t)$ est alors formé d'une suite périodique, qui peut être de longue période, d'impulsions réparties pratiquement au hasard (pas vraiment).

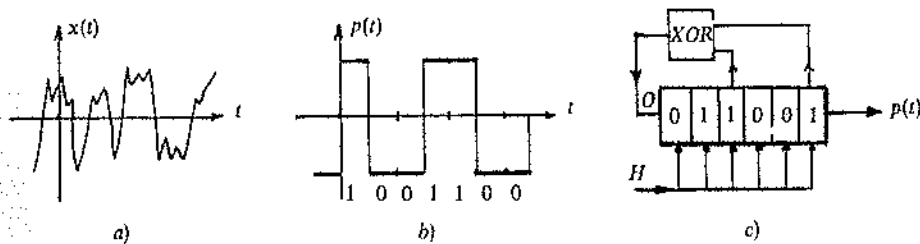


Fig. 3.10.

Les signaux aléatoires sont employés en identification.

5.4. Le peigne de Dirac unitaire centré $\sqcap$ (*)

C'est une distribution singulière périodique.

On note $\sqcap(t) = \sum_n \delta(t - nT)$.

La sommation s'étend sur l'infini (**) d'une suite de « fonctions de Dirac » retardées $\delta(t - nT)$ (fig. 3.11 a).

(*) • Lire $\sqcap$ et prononcer tcha.

(**) • Les sommations $\int$ ou $\sum$ pour lesquelles les bornes sont omises doivent être entendues sur un intervalle infini.

La multiplication de $\square(t)$ par une fonction $s(t)$ est une opération licite qui conduit à une pondération des poids des impulsions du peigne par les valeurs de la fonction aux instants nT (fig. 3.11 b)

$$s(t) \cdot \square(t) = \sum_n s(nT) \cdot \delta(t - nT)$$

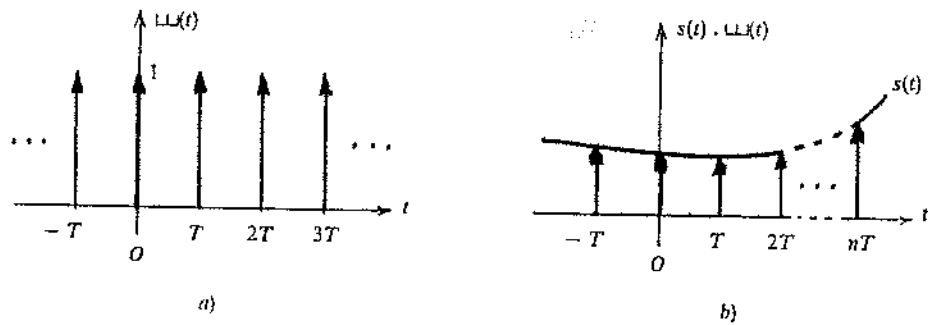


Fig. 3.11.

I
P
comp
réguli
Et
raison

1.1. 1

1.1.1 S

Si c
L'a
grand
fermé à

se qui
teurs

CHAPITRE 4

LES SIGNAUX A TEMPS DISCRET

Pour estimer sa vitesse, un conducteur n'a pas besoin de regarder son compteur en permanence. Il le consulte à intervalles plus ou moins espacés, réguliers ou non. Il prélève une information *échantillonnée*.

Entre deux coups d'œil au cadran, il ne connaît pas sa vitesse, mais il l'imagine raisonnablement, il *reconstruit* le signal à temps continu.

1. ÉCHANTILLONNAGE

1.1. L'échantillonnage simple s_{ech}

1.1.1 Structure

Si on veut mesurer une tension u_1 , on connecte un voltmètre.

L'appareil de mesure n'a pas besoin d'être connecté en permanence à la grandeur mesurée. Il peut l'être par l'intermédiaire d'un interrupteur (fig. 4.1) fermé à cadence régulière (ou non) Δ , au moment où on veut faire la mesure.

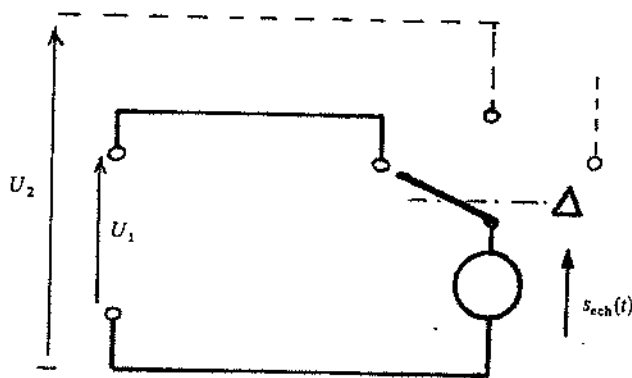


Fig. 4.1.

L'interrupteur ne reste fermé qu'un très court instant d ($d \ll \Delta$). Toutefois d ne peut pas être nul. d doit être suffisamment long pour que l'appareil de mesure ait le temps de dévier et de recopier les impulsions s_{ech} auxquelles il est soumis. L'appareil prélève, si peu que ce soit, de l'énergie.

Les impulsions *analogiques* obtenues, (fig. 4.2), montrent qu'on ne peut pas parler de valeur de $s(t)$ à l'instant t_0 , car s varie un peu à l'intérieur de d .

C'est pourquoi $s_{ech}(t)$ est assimilé (voir chap. 3, § 3) à une suite d'impulsions de Dirac de poids $d \cdot s(k\Delta)$, aire de l'impulsion.

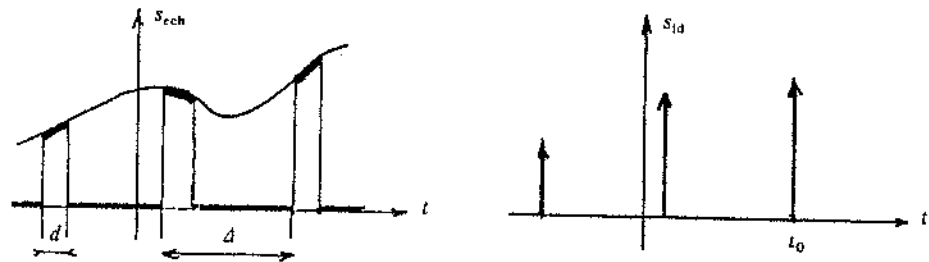


Fig. 4.2.

L'échantillon $s(k\Delta)$ est la valeur moyenne de $s(t)$ à l'intérieur de la durée d de la k -ième impulsion.

L'utilisation de la transformée de Laplace de s_{id} ($s_{idéalisé}$) est beaucoup plus simple que celle de s_{ech} .

On conçoit qu'un interrupteur rotatif permettra de lire plusieurs tensions $u_1, u_2, \dots$ avec un seul appareil, réalisant un échantillonnage multiplexé (partage du voltmètre).

Ce type d'échantillonnage analogique a beaucoup perdu de son intérêt depuis l'utilisation des calculateurs *numériques*.

1.1.2. Système analogique échantillonné standard

s_{id} dépend de la durée de la prise d'échantillon d , variable avec la technologie employée. On définit un signal standard s^* indépendant de d ,

$$s^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta \cdot s(k\Delta) \cdot \delta(t - k\Delta) = \Delta \cdot s(t) \cdot \sqcup(t) \quad (4.1)$$

$s^*(t)$ est la « fonction » qui représente l'échantillonnage standard de $s(t)$; s^* est en fait une distribution traitée ici comme une fonction.

On observe que d , variable, a été remplacé par Δ , fixe. Δ est indispensable à l'homogénéité de l'expression; sa disparition fréquente dans la littérature est source de confusion. Nous conseillons de maintenir Δ , même si le pas d'échantillonnage est pris comme unité.

1.2

1.2.

sou:
séq $s(t)$ •
•

signal
(tensio.
de l

1.2.2.

An
seront
La
binaire
le temp
type de
Pour ce
de prin

entrée
analogiqu

(*) Souv

1.2. Échantillonnage vu du calculateur

1.2.1. Structure

Le calculateur numérique est un dispositif qui traite des données présentes sous forme de mots binaires et l'enchaînement de ses tâches se fait de manière séquentielle.

Acquérir, en vue d'un traitement, toutes les Δ secondes, la valeur de la tension $s(t)$ aux bornes d'une charge, nécessite deux opérations :

- numérisation (ou conversion analogique-numérique)
- échantillonnage (ou acquisition proprement dite).

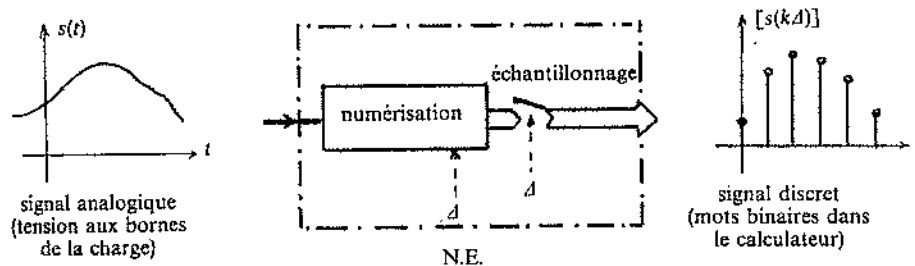


Fig. 4.3.

1.2.2. Fonctionnement

Analysons la « boîte N.E. » de la figure 4.3 (des détails plus technologiques seront présentés ultérieurement dans ce volume).

La numérisation — conversion — d'une grandeur analogique en un mot binaire est assurée par un convertisseur analogique-numérique (CAN). Durant le temps de la conversion, qui peut aller jusqu'à quelques millisecondes selon le type de convertisseur, le signal analogique à convertir doit être maintenu constant. Pour cela, on fait précéder le CAN d'un dispositif suiveur-bloqueur (*); le schéma de principe est donné à la figure 4.4 :

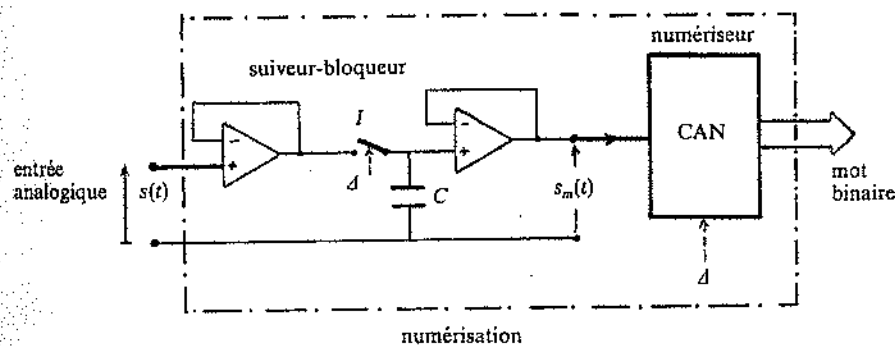


Fig. 4.4.

(*) Souvent désigné par échantillonneur-bloqueur.

Les deux circuits suiveurs ont des impédances d'entrée très élevées et de sortie très faibles. Supposons l'interrupteur électronique I manœuvré à la cadence Δ . Cet interrupteur étant en position fermée, la tension aux bornes du condensateur C et $s_m(t)$ « suivent » $s(t)$. Lors d'une demande d'acquisition, toutes les Δ secondes, on ouvre d'abord I : la tension aux bornes de C , recopiée en $s_m(t)$ demeure constante (bloquée), pendant le temps nécessaire à la conversion. Celle-ci terminée, il y a transfert du signal numérisé (mot binaire) vers l'organe de traitement et fermeture de l'interrupteur I . (Voir chap. 26, § 3). Le transfert se fait via une interface programmable ou directement si le CAN est compatible avec les bus du processeur.

On a ainsi — en sortie de la « boîte N.E. » — une information échantillonnée sous forme discrète $[s(k\Delta)]$ du signal analogique $s(t)$, à la cadence Δ .

2. NUMÉRISATION

2.1. Signaux numériques par nature $[s(k\Delta)]$

Le nombre des passagers au décollage d'Orly sur la journée du 15 juin est représenté par un signal numérique.

Ce nombre dépend du numéro du vol, lequel est un entier 1, 2...

Le signal numérique est donc une fonction s qui à tout k (le numéro du vol) associe un réel $s(k)$ (le nombre de passagers)

$$s : k \mapsto s(k) \quad k \text{ entier.}$$

Pour bien mettre en évidence le caractère discret de la variable k , la fonction s sera notée $[s(k)]$ ou $[s(k\Delta)]$.

On ne devra donc pas confondre $[s(k)]$ la fonction avec $s(k)$ valeur réelle de cette fonction en k .

Quelquefois, des confusions pourront être engendrées par les allègements d'écriture.

2.2. Signaux numériques obtenus après échantillonnage

La valeur quotidienne de la température dans une station météorologique est un nombre prélevé chaque jour ($\Delta = 1$ jour) sur un signal à temps continu $s(t)$.

Le signal obtenu est un signal discret $[s(k\Delta)]$.

La fonction $[s(k\Delta)]$ n'est autre que la fonction s dont la variable continue t a été restreinte aux multiples entiers du pas d'échantillonnage $k\Delta$.

Le nombre $s(k\Delta)$ est donc obtenu en faisant $t = k\Delta$ dans $s(t)$. Souvent, on fera $\Delta = 1$ et on parlera de $s(k)$, l'écriture en est facilitée mais il y a quelques risques d'incompréhension.

Le signal échantillonné-numérisé ou numérisé-échantillonné (selon l'interprétation de la position de l'échantillonneur) est un signal numérique.

3. COMPARAISON ENTRE s^* ET $[s(k\Delta)]$

s^* est une distribution, et $[s(k)]$ une fonction, la comparaison n'est donc pas possible. Au prix de certains écarts de langage et en considérant δ comme une fonction on peut dire :

s^* et $[s(k\Delta)]$ seront vues l'une et l'autre indifféremment comme des versions échantillonnées du signal à temps continu s (voir fig. 4.5).

s^* est la version analogique.

$[s(k\Delta)]$ est la version numérique.

En pratique s^* avait été inventée pour faciliter les calculs des systèmes échantillonnés analogiques à l'aide de la transformée de Laplace (transmittance pulsée...).

La suprématie du calculateur numérique diminue un peu l'utilisation de s^* au profit de $[s(k\Delta)]$ et de la transformée en z .

Désormais, nous considérerons un système placé entre échantillonneurs comme étant fondamentalement un système numérique.

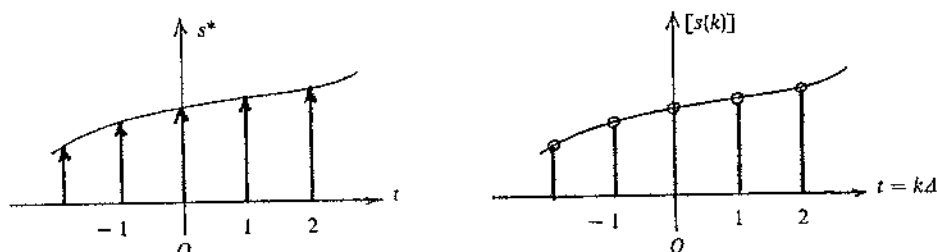


Fig. 4.5.

4. LES SIGNAUX NUMÉRIQUES FONDAMENTAUX

Ils peuvent exister comme tels, souvent ils sont les versions échantillonnées (numériques) des signaux test analogiques.

On convient que si l'instant d'échantillonnage survient sur une discontinuité, l'échantillon pris est la valeur à droite de la discontinuité.

4.1. La rampe unitaire $[r(k\Delta)]$ (fig. 4.6)

$$r(k\Delta) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k < 0 \text{ signal causal} \\ k\Delta & \text{pour } k \geq 0 \end{cases}$$

$[r(k\Delta)]$ sera (hélas) souvent notée $r(k)$ au prix d'une double incorrection.

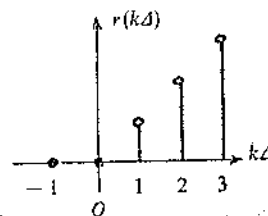


Fig. 4.6.

4.2. L'échelon $[\Gamma(k\Delta)]$ unitaire et causal (fig. 4.7)

$$\Gamma(k) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k < 0 \\ 1 & \text{pour } k \geq 0 \end{cases}$$

Il peut provenir de l'échantillonnage de $\Gamma(t)$ (voir convention préliminaire d'échantillonnage sur une discontinuité).

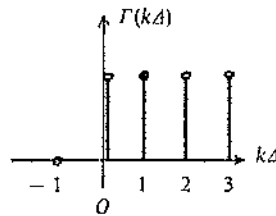


Fig. 4.7.

4.3. Le Dirac $[\delta(k)]$ unitaire centré (fig. 4.8)

$$\delta(k) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq 0 \\ 1 & \text{pour } k = 0 \end{cases}$$

il peut provenir de l'échantillonnage de l'impulsion standard.

Il est essentiel ici de ne pas confondre $[\delta(k)]$ et $\delta(k)$.

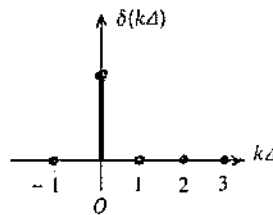


Fig. 4.8.

4.4. Comparaison entre $\delta(t)$ et $\delta(k)$

$[\delta(k)]$ est la version numérique et $\delta(t)$ la version analogique de l'échantillonnage de l'impulsion *standard* ci-contre, de hauteur 1 et de largeur Δ (aire Δ) (fig. 4.9).

- L'échantillonnage, à droite des discontinuités donne bien $[\delta(k)]$.
- Par ailleurs $s^*(t) = \Delta \cdot 1 \cdot \delta(t)$, la somme Σ figurant dans l'expression (4.1) se réduisant à un seul échantillon $s(0) = 1$.

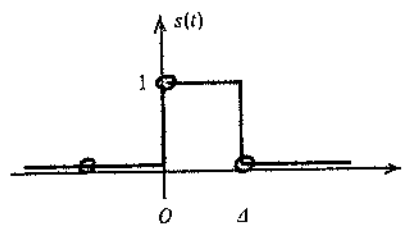


Fig. 4.9.

4.4 Expression générale d'un signal quelconque $[u(k\Delta)]$

Un signal quelconque $[u(k\Delta)]$ peut être considéré comme la somme pondérée d'impulsions de Dirac décalées (fig. 4.10)

$$u(k) = \dots + u(0) \cdot \delta(k) + u(1) \cdot \delta(k-1) + \dots + u(i) \delta(k-i) + \dots$$

$$u(k) = \sum_i u(i) \cdot \delta(k-i)$$

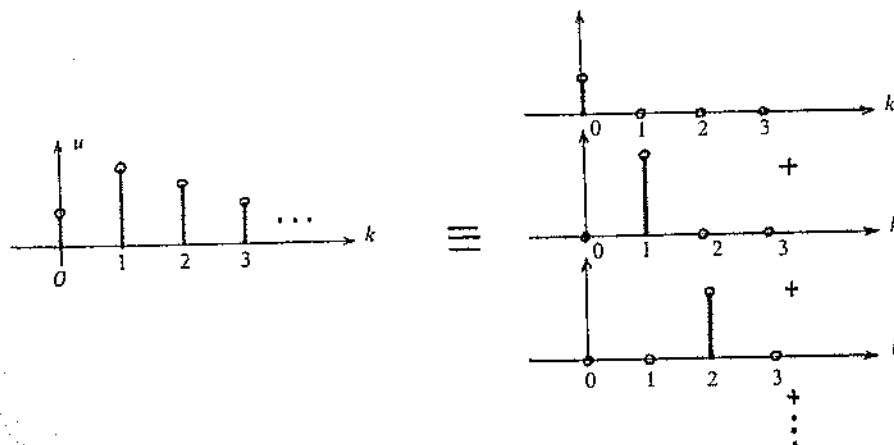


Fig. 4.10.

Ainsi, en rétablissant Δ le pas d'échantillonnage, il vient, pour l'échantillonnage d'un signal $u(t)$:

$$u(k\Delta) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} u(i\Delta) \cdot \delta(k\Delta - i\Delta)$$

Ceci est la version numérique qu'il faut à l'évidence rapprocher de

$$u^*(t) = \Delta \cdot \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} u(i\Delta) \cdot \delta(t - i\Delta)$$

qui est la version analogique.

Dans ces deux expressions, les « Dirac » sont très différents.

5. CONVERSION ANALOGIQUE-NUMÉRIQUE ET NUMÉRIQUE-ANALOGIQUE

En automatique, en physique, on observe des chaînes mixtes de systèmes analogiques en communication avec des systèmes numériques.

Chaîne Hi-Fi à compact-disc, réseau téléphonique, boucle de régulation, sont des systèmes mettant en œuvre des parties numérisées et des parties analogiques.

Les conversions de signaux nécessaires impliquent en pratique des opérations d'échantillonnage et de blocage inséparables de celles de la conversion proprement dite.

5.1. La conversion analogique-numérique

Une autre interprétation — équivalente du point de vue du résultat — du § 1.2.1 est de considérer que l'échantillonnage, à la cadence Δ , est réalisé par le suiveur-bloqueur, la conversion ayant lieu immédiatement après l'ouverture de l'interrupteur I , sur un signal bloqué, suivie d'un transfert.

Le schéma fonctionnel du dispositif échantillonnage-numérisation, réalisé à l'aide de deux fonctions élémentaires est représenté fig. 4.11.

E est l'échantillonneur.

N est le CAN proprement dit qui assure la conversion.

$s(k\Delta)$ est alors un nombre, codé sur 8, 12, ... bits.

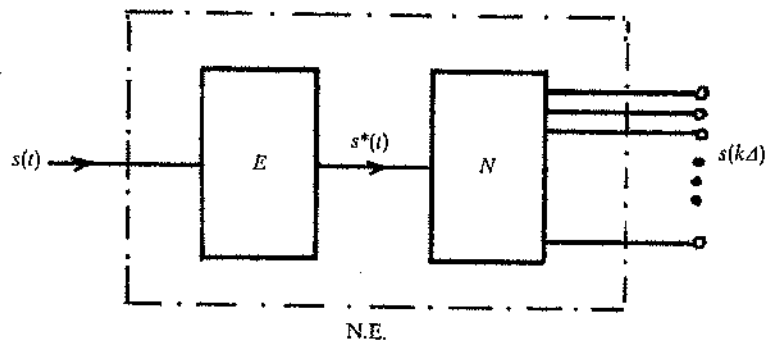


Fig. 4.11.

5.2. La conversion numérique-analogique

L'opération est réalisée à l'aide de deux fonctions élémentaires (fig. 4.12).

D est le convertisseur NA proprement dit, il réalise la dénumérisation.

BOZ reconstruit le signal à temps continu qui est l'opération inverse de l'opération d'échantillonnage. On conçoit qu'il est impossible de reconstituer

l'informat
sera étudi.

La faci
le signal o

On ob

Le blo

Il existe

Remarque in

La descr
n'est pas un

numérique :

Cette m

- L'entr
l'échantillon

- Le CN
Entrée-Sorti

Ainsi, le
cadençant le

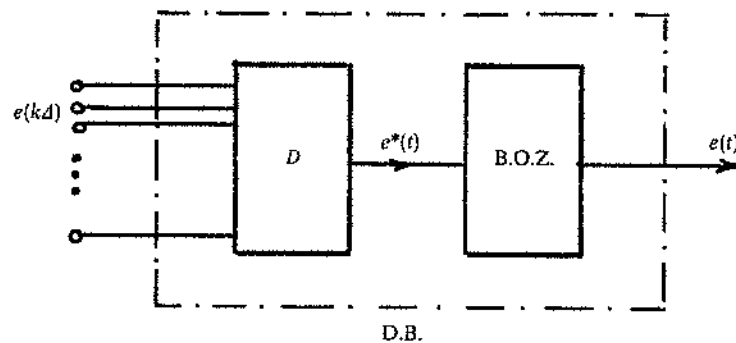


Fig. 4.12.

l'information qui manque entre deux échantillons. Cette importante question sera étudiée plus loin avec le théorème de Shannon.

La façon la plus simple et la plus répandue (mais non unique) de reconstruire le signal consiste à « bloquer » l'échantillon courant jusqu'à l'arrivée du suivant. On obtient un signal en marches d'escalier (fig. 4.13).

Le bloqueur BOZ est dit d'ordre zéro.

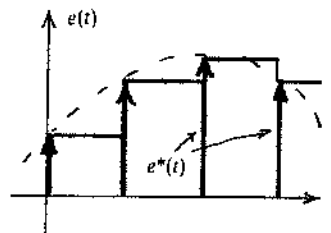


Fig. 4.13.

Il existe d'autres reconstructions possibles, par filtrage notamment.

Remarque importante

La description ci-dessus est purement fonctionnelle. Le bloqueur d'ordre zéro n'est pas un composant analogique. En fait, le blocage est assuré par mémorisation numérique du signal $e(k\Delta)$, dans un registre (Latch).

Cette mémorisation peut avoir lieu de deux manières différentes :

- L'entrée du CNA est munie d'un registre tampon qui garde en mémoire l'échantillon jusqu'à l'arrivée de son successeur.
- Le CNA n'est pas muni de ce registre, mais il est connecté à un port Entrée-Sortie du microprocesseur qui, lui, possède ce registre.

Ainsi, le CNA « voit » l'échantillon pendant toute la durée Δ de l'horloge cadencant les opérations, sa sortie est donc bien en marches d'escalier.

CHAPITRE 5

LES SYSTÈMES CLASSIFICATION

1. CLASSIFICATION DES ENTRÉES-SORTIES

Un système est un ensemble directionnel.

Les signaux d'entrée agissent en tant que causes, les effets s'observent sur les sorties. Il est analogique (temps continu), numérique (temps discret) ou échantillonné (analogique discrétisé).

1.1. Les entrées

Les entrées de *commande* permettent d'agir sur le système et de le piloter vers un but spécifié.

Les entrées de *perturbation* sont subies sans qu'on puisse agir sur elles, leur mode d'action est parfois mal identifié.

1.2. Les sorties

Elles permettent d'observer le système; elles dépendent du point de vue où on se place. On peut ainsi observer la vitesse ou bien le couple d'un moteur.

L'*état* du système est une notion moderne. Il permet d'observer depuis plusieurs points de vue, à l'aide de variables dites variables d'état.

Un système monovariante a une seule entrée et une sortie, il est multivariable dans tout autre cas.

2. LES SYSTÈMES MONOVARIABLES

2.1. Système causal (non anticipatif)

C'est un système qui ne répond pas avant d'être excité. Si l'entrée est nulle pour $t < 0$, la sortie l'est aussi.

Les systèmes *temporels* (signaux dépendant du temps) réalisables sont causals.

2.2. Système dynamique (ou système à mémoire)

Un système est dit *instantané* si à un instant donné sa sortie ne dépend que de l'excitation à cet instant.

Dans tout autre cas, il est dit, à mémoire, ou dynamique.

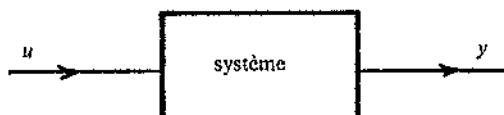


Fig. 5.1.

Systèmes instantanés

$$y(k) = a \cdot u^2(k)$$

$$y(t) = a(t) \cdot u(t)$$

Systèmes à mémoire

$$y(k) = au(k) + bu(k-1)$$

$$y(t) = au(t - t_0)$$

$$y(t) = au(t) + by'(t)$$

L'élément-mémoire d'un système analogique est le condensateur, celui du système numérique est le « latch » (la bascule-mémoire).

L'intégrateur (condensateur) et le registre à décalage (bascule) permettent la modélisation et la réalisation des systèmes dynamiques.

2.3. Système stable

Sa sortie est bornée lorsque son entrée l'est.

Excité par une impulsion de Dirac, le système partant du repos voit sa sortie revenir à zéro, après un certain temps s'il est analogique, ou après un certain nombre de coups d'horloge s'il est numérique.

2.4. Système à temps invariant

Un décalage temporel sur l'entrée décale la sortie d'autant. Le système garde ses propriétés sans vieillir. En numérique si l'entrée est décalée de quelques coups, la sortie est décalée d'autant. Un parcmètre est un système numérique. L'entrée est la somme d'argent introduite, la sortie est la durée de stationnement autorisée correspondante. Ce n'est pas un système invariant car le « tarif » varie selon les heures (après 19 h) et les jours (dimanche) de la semaine.

2.5 Système linéaire

Il satisfait au principe de superposition.

La réponse à la somme pondérée de deux excitations est la somme pondérée des réponses à chaque excitation séparée.

Nous supposons que nous pouvons étendre cette somme à un nombre infini de termes ou à une intégrale.

3. LA RELATION ENTRÉE-SORTIE DES S.L.T.I.

De tous les systèmes, nous distinguerons ceux qui sont *causals*, *linéaires* et à *temps invariant*.

La relation entrée-sortie est une équation différentielle ou récurrente linéaire et à coefficients constants. Les conditions initiales sont nulles; le système est au repos lorsque l'excitation est nulle.

La solution de l'équation, qui donne la réponse du système à une excitation imposée fait l'objet des chapitres suivants.

1.

1.1. D

$[x(t)]$
appelle,
fonction

un simp
produit.

Si $[x$ $x(t) =$

Le p

1.2. Co

Le p

Pour

[
]

CHAPITRE 6

LA RÉPONSE DES SYSTÈMES CONVOLUTION

1. DÉFINITION DU PRODUIT DE CONVOLUTION

1.1. Discret

$[x(k)]$ et $[y(k)]$ sont deux signaux définis pour k entier quelconque. On appelle, sous réserve d'existence, $[p(k)]$ le produit de convolution défini par la fonction qui à k entier associe $p(k)$ tel que

$$p(k) = (x * y)(k) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} x(i) \cdot y(k-i) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} y(i) \cdot x(k-i)$$

un simple changement de variables permet de montrer la commutativité du produit.

Si $[x(k)]$ et $[y(k)]$ sont causals alors

$x(i) = 0$ pour $i < 0$ et $y(k-i) = 0$ pour $k-i < 0$ donc $i > k$

Le produit se simplifie

$p(k) = \sum_{i=0}^{i=k} x(i) \cdot y(k-i)$	$= \sum_{i=0}^{i=k} y(i) \cdot x(k-i)$
---	--

(6.1)

1.2. Continu

Le produit, commutatif, se décrit de manière analogue

$$p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \cdot y(t-u) du$$

Pour des signaux x et y causals, on a :

$p(t) = (x * y)(t) = \int_0^t x(u) \cdot y(t-u) du$	$= \int_0^t y(u) \cdot x(t-u) du$
---	-----------------------------------

(6.2)

2. QUELQUES PROPRIÉTÉS CONVOLUTION AVEC L'IMPULSION DE DIRAC

2.1. Discret : $\delta(k)$

$$2.1.1. (x * \delta)(k) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} x(k-i) \cdot \delta(i)$$

Le seul terme non nul de la série s'obtient pour $i = 0$ car seul $\delta(0) = 1$, $\delta(i)$ est nul pour les autres valeurs de i .

Donc :

$$(x * \delta)(k) = x(k).$$

$\delta(k)$ est l'élément neutre pour le produit (de convolution).

2.1.2. La convolution avec un Dirac retardé, retarde le signal :

$$x(k) * \delta(k - k_0) = x(k - k_0)$$

car dans la série qui explicite le produit de convolution, seul le terme $x(k - k_0)$ est retenu, puisque $\delta(k - k_0)$ est nul pour $(k - k_0) \neq 0$.

Remarque

Le produit de convolution est un produit de fonctions, il aurait fallu l'écrire :

$$[x(k)] * [\delta(k - k_0)] = [x(k - k_0)].$$

2.1.3. D'après 2.1.2. la convolution par un peigne de Dirac va « périodiser » le signal puisque chaque « dent » a une action de recopie autour d'elle (fig. 6.1).

$$s(k) * \text{peigne}(k) = s_p(k) \quad (\text{période} = 6)$$

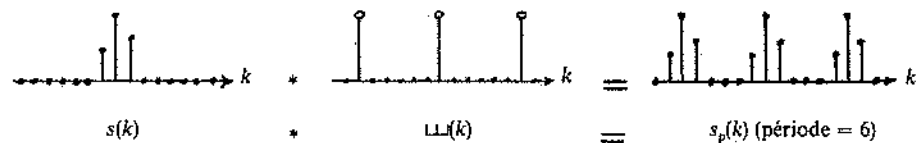


Fig. 6.1.

$s(k)$ doit être nul en dehors d'un intervalle et la période du peigne doit être assez grande, sinon il y aura recouvrement, ce qui enlève de l'intérêt à l'opération.

2.2. Continu : $\delta(t)$

Les trois résultats précédents sont entièrement transposables.

$$2.2.1 (x * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u) \cdot \delta(u) \cdot du$$

mais
De

2.2.2. 1

2.2.3. 1

Cha
est rec
(fig. 6.2

3. LA

3.1. Di

La ré
(fig. 6.3).
Donc
récurrent

L'entr
Le systèm
On pe

(*) Cette
est $y(k) \sim$
vers la sorti
pas nul (acti

mais $x(t-u) \cdot \delta(u) = x(t) \cdot \delta(u)$ comme cela a été démontré (chap. 2, § 5.2).

Donc

$$(x * \delta)(t) = x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u) du = x(t)$$

2.2.2. De même

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

2.2.3. Enfin

$$x(t) * \text{combedent}(t) = x_p(t)$$

Chaque dent du peigne a une action de recopie autour d'elle, et le motif $x(t)$ est recopié périodiquement pour donner $x_p(t)$; la période est celle du peigne (fig. 6.2).

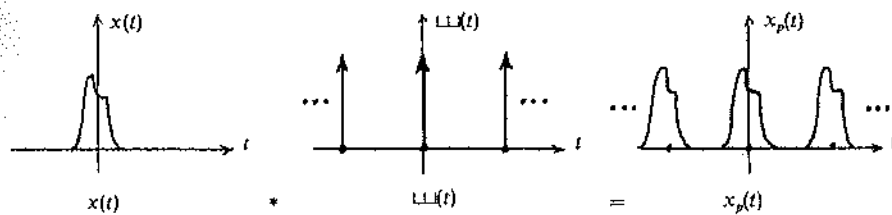


Fig. 6.2.

3. LA RÉPONSE IMPULSIONNELLE D'UN S.L.T.I. CAUSAL

3.1. Discret

La réponse impulsionnelle $h(k)$ est la réponse du système à l'impulsion $\delta(k)$ (fig. 6.3).

Donnons-nous un *exemple* : l'entrée u et la sortie y sont liées par l'équation récurrente du premier ordre suivante :

$$y(k) - ay(k-1) = u(k) \quad (*) \quad (6.3)$$

L'entrée $u(k)$ étant l'impulsion de Dirac elle vaut 1 uniquement pour $k=0$. Le système étant causal $y(k) = 0$ pour $k < 0$ et en particulier $y(-1) = 0$.

On peut donc calculer la réponse $y(k)$ pas à pas

$$y(0) = 1$$

$$y(1) = ay(0) + 0 = a$$

$$y(2) = ay(1) + 0 = a^2 \quad \text{et donc} \quad y(k) = a^k$$

(*) Cette équation, n'est pas la forme standard qui sera étudiée au chapitre 18 qui est $y(k) - ay(k-1) = u(k-1)$, et non $u(k)$. Dans (6.3), il y a action (liaison) directe de l'entrée vers la sortie puisque par exemple $y(5)$ est fonction de $u(5)$. On remarque d'ailleurs que $h(0)$ n'est pas nul (action instantanée de l'impulsion d'entrée $\delta(k)$.)

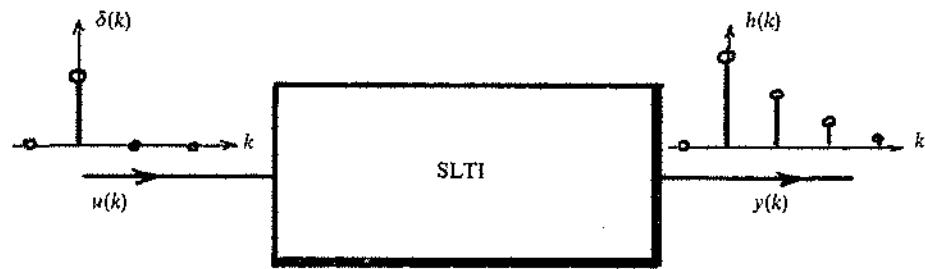


Fig. 6.3.

La réponse impulsionnelle de ce système est $h(k) = a^k$.

Le système sera stable si $|a| < 1$, en ce cas $h(k)$ décroît quand n augmente.

Si on procède à la numérisation (quantification), alors $h(k)$ sera codé égal à zéro à partir d'un certain rang, dès que $h(k) < \text{LSB}$ du système de quantification.

Le système est alors à réponse impulsionnelle finie (R.I.F.).

3.2. Continu

La réponse $h(t)$ à l'excitation $\delta(t)$ est aussi appelée réponse impulsionnelle.

Nous verrons comment calculer $h(t)$, solution de l'équation différentielle qui décrit le S.L.T.I.

4. LA RÉPONSE D'UN S.L.T.I. CAUSAL A UNE EXCITATION QUELCONQUE

4.1. Système numérique

Nous avons vu (chap. 4, § 4) qu'un signal numérique quelconque est en fait une somme pondérée de fonctions impulsionnelles décalées (fig. 6.4).

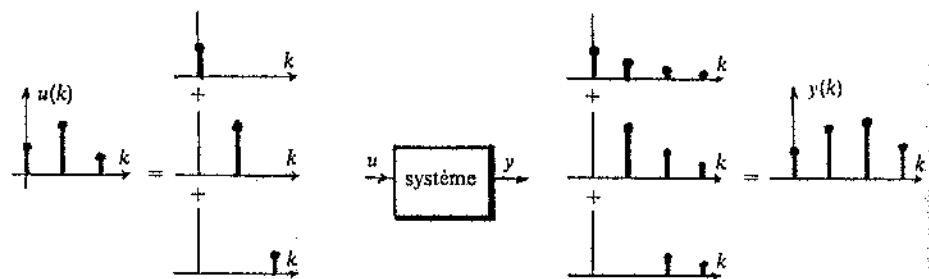


Fig. 6.4.

Chaque impulsion agit pour son propre compte à travers le système. $h(k)$ est la réponse à l'entrée impulsionnelle $\delta(k)$.

$u(i) \cdot h(k-i)$ sera celle correspondant à l'impulsion $u(i) \cdot \delta(k-i)$.

En effet : 1) Le système est invariant donc si on décale l'entrée de i coups h sera aussi décalée de i coups.

2) Le système est linéaire, donc si on multiplie l'entrée par $u(i)$, la sortie est multipliée d'autant.

Et la somme de toutes les impulsions d'entrée $u(k)$

$$u(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u(i) \cdot \delta(k-i)$$

produit la superposition des réponses $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} u(i) \cdot h(k-i)$

Théorème

La réponse $[y(k)]$ à une entrée $[u(k)]$ est le produit de convolution de l'entrée par la réponse impulsionnelle du système :

$$\begin{aligned} y(k) &= (h * u)(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(k-i) \cdot u(i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} h(k-i) \cdot u(i) \end{aligned}$$

si $u(k)$ est causale, car $h(k)$ est causale.

4.2. Système continu

La démonstration est identique, la somme discrète sera remplacée par une intégrale

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \cdot \delta(t-x) dx \quad (\text{convolution avec Dirac}) \quad (\text{chap. 6, § 2})$$

donc $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-x) \cdot u(x) dx$ sera la réponse du système.

On reconnaît le produit de convolution $(h * u)(t)$.

La sommation (ou l'intégrale) sont limitées à l'intervalle $[0, k]$ (ou $[0, t]$) lorsque le signal d'excitation causal est appliqué à l'instant $t=0$ à un système au repos.

En résumé

$$y = h * u = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k} h(k-i) \cdot u(i) \\ \int_0^t h(t-x) \cdot u(x) dx \end{cases}$$

5. APPROXIMATION D'UNE IMPULSION BRÈVE PAR UN DIRAC (DÉMONSTRATION)

Nous avons déjà évoqué (chap. 3, § 3) cette possibilité. Démontrons-la. $e(x)$ est une impulsion de durée x_0 , brève devant le temps de réponse du système qu'elle va exciter, dont la réponse impulsionnelle est $h(x)$ (fig. 6.5 a).

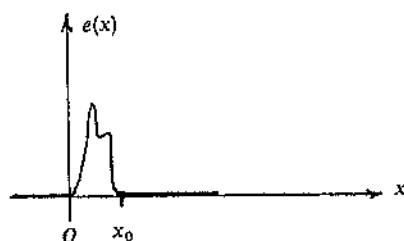
La réponse s , du système h , à cette entrée e sera :

$$s(t) = (h * e)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \cdot e(t-x) dx$$

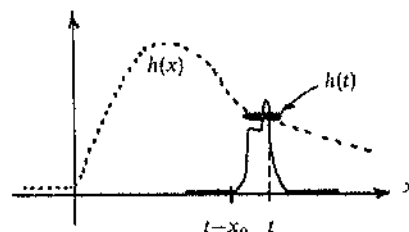
Comme

$$e(t-x) = 0 \text{ pour } t-x < 0 \text{ et } t-x > x_0$$

$$\text{on a } s(t) = \int_{t-x_0}^t h(x) \cdot e(t-x) dx.$$



a)



b)

Fig. 6.5.

Si x_0 est petit devant la durée de $h(t)$, on peut donc considérer que sur l'intervalle $[t-x_0, t]$, $h(x)$ varie peu et vaut donc $h(t)$ (fig. 6.5 b).

On a alors $s(t) \simeq h(t) \cdot \int_{t-x_0}^t e(t-x) dx = \mathcal{A} \cdot h(t)$, où $\mathcal{A}$ représente l'aire de l'impulsion $e(x)$.

Comme $s(t)$ est $\mathcal{A}$ fois la réponse du système à l'impulsion de Dirac, c'est donc que l'entrée est $\mathcal{A}$ fois ce Dirac.

D'où $e(t) \simeq \mathcal{A} \cdot \delta(t)$.

Théorème

Une impulsion brève de forme quelconque, peut être remplacée pour les calculs par un Dirac de poids $\mathcal{A}$, où $\mathcal{A}$ est l'aire de l'impulsion.

Ainsi, la réalisation matérielle d'impulsions de Dirac au laboratoire se résume à la création d'impulsions brèves, mais suffisamment énergétiques ($\mathcal{A}$ significatif) pour exciter le système de manière à obtenir une réponse visible et mesurable.

Au l
d'excite

Le r
de faible
est dan
saturati
brièveté.

La d
l'énergie
aléatoire

La ti
d'observ
déconvo

6.1. Le

On a

$k =$

$k =$

le terme

Ainsi,
de détér

6.2. Le

L'inté
méthode

Il vier

6. DÉTERMINATION DE LA RÉPONSE IMPULSIONNELLE : DÉCONVOLUTION

Au laboratoire, la première idée qui vient à l'esprit pour obtenir $h(t)$ est d'exciter le système avec une impulsion brève (voir § 5) et d'observer la sortie.

Le résultat est souvent décevant, car le système réagit peu à une impulsion de faible énergie et « on ne voit rien » ou presque. Toute augmentation de l'énergie est dangereuse car, par l'augmentation de l'amplitude on est menacé par la saturation, et par l'augmentation de la durée on ne satisfait plus à l'impératif de brièveté.

La deuxième idée est d'envoyer un train d'impulsions de façon à cumuler l'énergie. Cela se fait, et si les excitations sont réparties de manière quasi (pseudo) aléatoire, on peut par corrélation (voir Tome 2 : identification) obtenir $h(t)$.

La troisième idée est d'envoyer une excitation quelconque mais connue $u(t)$, d'observer la réponse $y(t)$ et d'extraire $h(t)$ de l'équation $y = h * u$. C'est la déconvolution.

6.1. Le système est discret et $u(0) \neq 0$

On a $y(k) = u(0) \cdot h(k) + u(1) \cdot h(k-1) + \dots + u(k) \cdot h(0)$; faisons

$$k=0 \quad y(0) = u(0) \cdot h(0) \quad \text{donc} \quad h(0) = \frac{y(0)}{u(0)}$$

$$k=1 \quad y(1) = u(0) \cdot h(1) + u(1) \cdot h(0) \quad \text{donc} \quad h(1) = \frac{y(1) - h(0) \cdot u(1)}{u(0)}$$

$$\text{le terme général est } h(k) = \frac{1}{u(0)} \left[y(k) - \sum_{i=1}^{k-1} h(k-i) \cdot u(i) \right].$$

Ainsi, sous réserve que $u(0)$ ne soit pas nul, ni trop petit (erreurs), il est possible de déterminer $h(k)$ à partir des échantillons des signaux $u(i)$ et $y(i)$.

6.2. Le système est continu et $u(0+) \neq 0$

L'intégrale de définition $y(t) = \int_0^t h(t-x) \cdot u(x) dx$ est calculée par la méthode des rectangles (chap. 1, § 3), leur base est Δ .

Il vient $y(k\Delta) = \Delta \sum_{i=0}^{k-1} h((k-i)\Delta) \cdot u(i\Delta)$; soit en allégeant l'écriture

$$y(k) = \Delta \cdot [u(0) \cdot h(k) + u(1) \cdot h(k-1) + \dots + u(k-1) \cdot h(1)]$$

On se ramène à l'étude précédente, à ceci près que la suite s'arrête un coup avant, et que Δ est en facteur.

L'influence des perturbations et des bruits est gênante.

Des essais répétés avec la même entrée vont permettre d'en diminuer l'incidence.

r est un reg
 $h(0), h(1) \dots$

Le sommat
provenant des

On voit qu
tous les regist
continu.

La cadence
fait par progr

7. CONVOLUTION CÂBLÉE

Un filtre est un système qui reçoit en entrée le signal à filtrer et qui produit en sortie un signal modifié, c'est-à-dire « filtré ».

Pour les signaux numériques on a, s'ils sont causals :

$$s(k) = \sum_{i=0}^{i=k} h(i) \cdot e(k-i)$$

$h(i)$ est la réponse impulsionnelle du filtre. Elle doit être déterminée spécialement pour que le filtre remplisse l'objectif qui lui est assigné.

Examinons le cas où le filtre calculé est à réponse impulsionnelle finie (R.I.F.)(*). On a alors :

$$h(i) = 0 \quad \text{pour } i < 0 \quad \text{et pour } i > i_0$$

Traisons par exemple le cas où $i_0 = 3$.

On aura :

$$\begin{aligned} s(k) &= \sum_{i=0}^{i=3} h(i) \cdot e(k-i) \\ &= h(0) \cdot e(k) + h(1) e(k-1) + h(2) \cdot e(k-2) + h(3) e(k-3) \end{aligned}$$

Ainsi on peut sortir $s(k)$ en temps réel. Les constructeurs proposent de tels filtres. Dans le filtre non récursif à structure directe, présenté à la figure 6.6, $e(k)$ est codé sur 8 ou 10 bits.

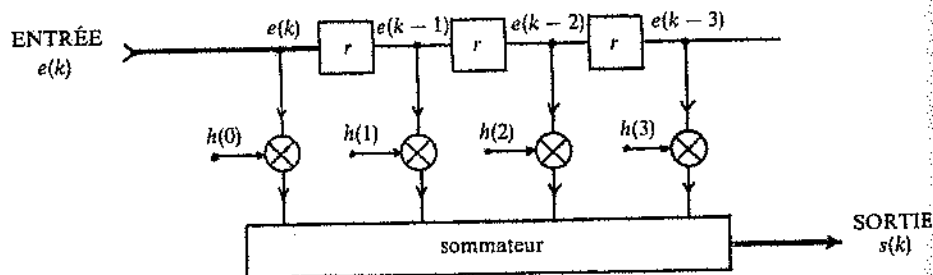


Fig. 6.6.

(*) Ou F.I.R. en anglais : Finite Impulse Response.

un coup

r est un registre à décalage qui retarde d'un coup.

$h(0), h(1) \dots$ sont également codés sur 8 ou 10 bits.

diminuer

Le sommateur réalise ici la sommation de 4 nombres codés sur 8 ou 10 bits provenant des 4 produits, effectués par 4 multiplicateurs numériques.

On voit qu'avant de commencer, il faut initialiser le filtre et mettre zéro dans tous les registres et dans le sommateur. Ensuite la convolution est effectuée en continu.

La cadence peut être très rapide, beaucoup plus rapide que si le calcul est fait par programme.

qui produit

spécialement

onnelle finie

(-3)

posent de tels

figure 6.6, $e(k)$

SORTIE
 $s(k)$

3^e PARTIE

REPRÉSENTATION FRÉQUENTIELLE DES SIGNAUX FONCTION DE TRANSFERT DES SYSTÈMES

Un S.L.T.I. qui reçoit un signal $u(t)$ le transmet vers sa sortie mais il le déforme et $y(t)$ peut être très différent de $u(t)$.

Ainsi, une excitation en créneau verra ses angles vifs arrondis voire complètement rabotés, une sinusoïde sera affaiblie et déphasée.

Il n'est pas aisé de prévoir les déformations subies par un signal car elles dépendent de l'appareil et aussi du signal lui-même.

Souvent, le système réagit mal aux signaux à variations rapides, sa propre réponse impulsionnelle s'étale dans le temps, on le dit « lent ».

Quelquefois, il se montre très sensible à certains signaux au point même d'osciller, on dit qu'on a excité un mode de résonance.

On se rend compte que la description des phénomènes par la relation de convolution vue dans la 2^e partie

$$y = h * u$$

n'est pas bien appropriée pour suivre certaines propriétés.

C'est pourquoi nous allons donner une autre « représentation » des signaux : la représentation fréquentielle, qui conduit à la fonction de transfert des systèmes.

Sur le plan mathématique cela implique la construction de transformations appropriées $\mathcal{T}$, fondamentalement linéaires.

Nous allons en définir quatre ($\mathcal{C}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{F}$).

La transformation $\mathcal{C}$ réservée aux signaux sinusoïdaux est à rapprocher de la méthode de Fresnel.

Les trois autres possèdent en commun, outre la linéarité, la propriété de transformer le produit de convolution en produit simple et les opérations d'intégration-dérivation (somme-différence) en opérations polynômiales.

La représentation fréquentielle des signaux est très familière aux électroniciens.

CHAPITRE 7

LA TRANSFORMATION c TRANSFORMATION CISSOÏDALE

La transformation C préfigure les transformations $\mathcal{L}$ (Laplace) ou $\mathcal{F}$ (Fourier).
On l'appelle transformation cissoïdale.

Elle fournit un cadre rigoureux et simple pour l'étude du régime permanent
sinusoïdal des systèmes linéaires, qui se substitue à la méthode de Fresnel.

Désormais, le lecteur traitera ses problèmes, non dans l'espace temporel qui
lui est familier, mais dans un espace image qui simplifiera les calculs.

1. DÉFINITION (fig. 7.1)

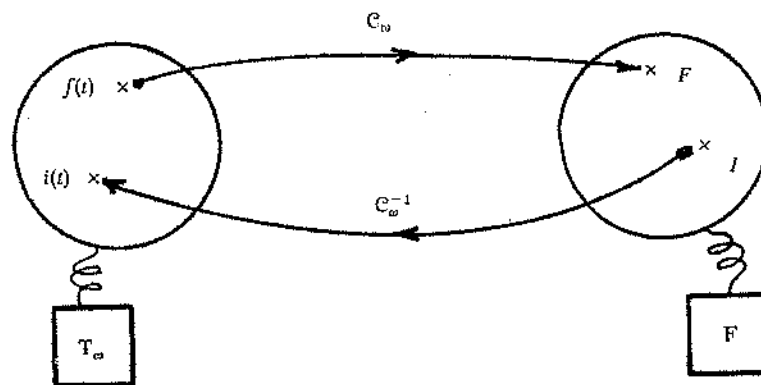


Fig. 7.1.

T_ω est l'ensemble des fonctions sinusoïdales du temps de pulsation fixe ω .
On démontre qu'il possède une structure d'espace vectoriel.

F est l'ensemble des nombres complexes.

C_ω est une application de T_ω dans F qui à toute fonction sinusoïdale s de T_ω fait correspondre le nombre S .

C_ω est cc

Le modu
L'argum
Nous all

$$i(t) = 3$$

$$v(t) = 22$$

$$s(t) = 2$$

Inversem

$$U = 1$$

$$\text{car } |U| = \frac{1}{\sqrt{}}$$

2.1. Linéar

La transfo

a et b étant d
Cette pro
 $\sin(\omega t + \varphi)$

2.2. Transf

La dérivée
de $\frac{\pi}{2}$. On a

$\mathcal{C}_\omega$ est construite de la manière suivante :

$$s(t) = A_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) \xrightarrow{\mathcal{C}} S = A_m \cdot e^{j\varphi} \\ -\pi < \varphi < +\pi$$

Le module de S est l'amplitude (> 0) de $s(t)$.

L'argument de S est la phase à l'origine φ de $s(t)$.

Nous allons donner quelques exemples.

$$i(t) = 3 \sin \omega t \quad \text{a pour image} \quad I = 3$$

$$v(t) = 220 \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \quad \text{a pour image} \quad V = 220 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

$$s(t) = 2 \cos \omega t = 2 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{a pour image} \quad S = 2 e^{j\frac{\pi}{2}} = 2j$$

Inversement

$$U = 100 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + j) \quad \text{a pour original} \quad u(t) = 100 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{car } |U| = \frac{100}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \text{Arg}(u) = \text{Arctg } 1 = \frac{\pi}{4}.$$

2. PROPRIÉTÉS

2.1. Linéarité

La transformation $\mathcal{C}_\omega$ est linéaire :

$$\mathcal{C}_\omega[a \cdot f + b \cdot g] = a \mathcal{C}_\omega[f] + b \mathcal{C}_\omega[g]$$

a et b étant des constantes réelles, f et g des fonctions sinusoïdales.

Cette propriété, un peu longue à démontrer s'appuie sur le fait que $\sin(\omega t + \varphi) = A \cdot \sin \omega t + B \cos \omega t$.

2.2. Transformée de la dérivée

La dérivée d'une sinusoïde est encore une sinusoïde mais de phase augmentée de $\frac{\pi}{2}$. On a donc très simplement si

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$i'(t) = I_m \cdot \omega \cdot \sin \left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\mathcal{C}_\omega[i'] = I_m \cdot \omega \cdot e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})} = j\omega \cdot I_m \cdot e^{j\varphi} = j\omega \cdot I$$

L'opération de dérivation dans l'espace T_ω se traduit par une opération de multiplication par $j\omega$ dans l'espace F .

2.3. Transformée d'une fonction retardée

Soit $s_1(t) = A \sin \omega t$, son image $S_1 = A$
 alors $s_2(t) = A \sin \omega(t - \tau) = A \sin (\omega t - \omega \tau)$
 aura pour image $S_2 = A \cdot e^{-j\omega \tau} = e^{-j\omega \tau} \cdot S_1$.

Un décalage temporel équivaut à un déphasage. L'exponentielle imaginaire traduit ce déphasage. Un décalage d'une période T est sans incidence sur l'image.

2.4. Représentation géométrique

$u(t) = U_m \cdot \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{6} \right)$ a pour image dans F

$$U = U_m \cdot e^{+j\varphi} \text{ avec } \varphi = -\frac{\pi}{6}.$$

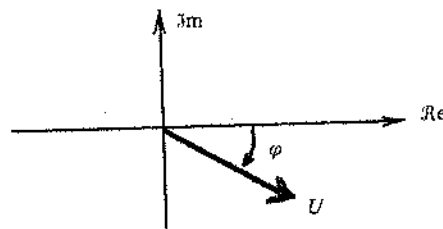


Fig. 7.2.

Nous avons la très classique représentation de Fresnel. Il convient d'observer que ω , la pulsation, est fixe (fig. 7.2).

3. APPLICATIONS. RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DE RÉGIME PERMANENT SINUSOÏDAL

Lorsqu'un système linéaire à temps invariant (S.L.T.I.) est excité par une entrée sinusoïdale de pulsation ω , il est remarquable que sa réponse *en régime permanent* soit sinusoïdale et de pulsation ω également.

Ceci résulte du fait qu'il existe une solution particulière sinusoïdale à l'équation différentielle

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \cdot x'(t) + a_0 \cdot x(t) = B \cdot \sin \omega t$$

La recherche de cette solution $x(t)$ est immédiate à l'aide de C_ω .

$x(t)$ est
Il vient

(

d'où X , c

? Exemple

L'équation
appliquée
direction

Si $f(t)$
Appliquée

1) Si k

2) Si k

Dans

On peut
la vitesse
aurait re

? Exemple

et
L'équation

$x(t)$ est de la forme $A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ où A et φ sont recherchés.
Il vient, en appliquant $\mathcal{C}_\omega$ à l'équation, et en posant $X = \mathcal{C}_\omega[x]$

$$(j\omega)^n X + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} X + \dots + a_0 X = B \Rightarrow X = \frac{B}{a_0 + \dots + (j\omega)^n}$$

d'où X , dont le module donnera A et dont l'argument donnera φ .

? Exemple 1

L'équation fondamentale de la dynamique, projetée sur l'axe horizontal, appliquée à la masse m qui glisse horizontalement sans frottement dans la seule direction D nous donne (fig. 7.3) :

$$f(t) - kx(t) = m\ddot{x}(t)$$

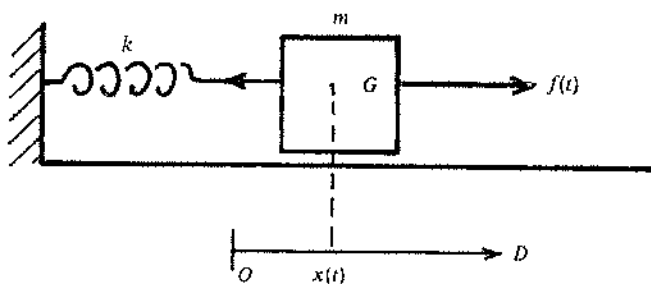


Fig. 7.3.

Si $f(t)$ est sinusoïdale $m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cdot \sin \omega t$.
Appliquons $\mathcal{C}_\omega$, $m(j\omega)^2 X + kX = F_0$ d'où

$$X = \frac{F_0}{k - \omega^2 \cdot m} \quad X \text{ est un nombre complexe}$$

- 1) Si $k > \omega^2 \cdot m$, $|X| = \frac{F_0}{k - \omega^2 m}$ et $\text{Arg } X = 0$.
- 2) Si $k < \omega^2 \cdot m$, $|X| = \frac{-F_0}{k - \omega^2 m}$ et $\text{Arg } X = \pi$.

Dans les deux cas $x(t) = \frac{F_0}{k - \omega^2 m} \cdot \sin \omega t$.

On peut observer que s'il y avait eu un terme de frottement proportionnel à la vitesse $\dot{x}(t)$, $j\omega$ aurait été présent et X aurait été complexe, son argument aurait représenté le déphasage entre $x(t)$ et $f(t)$.

? Exemple 2

$e(t) = E_0 \cdot \sin \omega t$ est une excitation sinusoïdale.

L'équation fondamentale de l'électricité (loi d'Ohm) nous donne :

$$\begin{cases} e(t) = R \cdot i(t) + v(t) \\ v(t) = Li'(t) \end{cases}$$

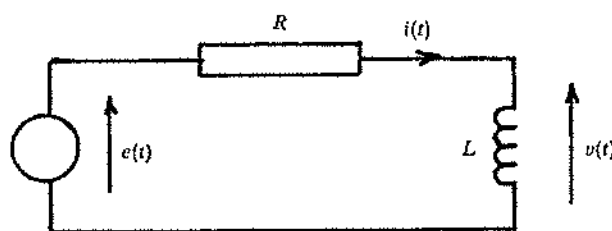


Fig. 7.4.

On souhaite calculer $v(t)$ en régime permanent.

Puisque $e(t)$ est sinusoïdale de pulsation ω , i et v le sont aussi.

On peut donc appliquer C_ω aux deux équations

$$\begin{cases} E = R \cdot I + V \\ V = L \cdot (j\omega) \cdot I \end{cases}$$

On déduira $V = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \cdot E$

Le lecteur aura remarqué l'introduction des notions familières d'impédance.

L'amplitude de $v(t)$ est le module de V soit : $\frac{L\omega \cdot E_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$.

Sa phase à l'origine est l'argument de V .

$$\text{Arg } V = \frac{\pi}{2} + \text{Arg}(E) - \text{Arctg}\left(\frac{L\omega}{R}\right) \quad \text{avec} \quad \text{Arg}(E) = 0$$

4. CONCLUSION

4.1. Fonction de transfert complexe d'un S.L.T.I. excité sinusoïdalement (fig. 7.5)

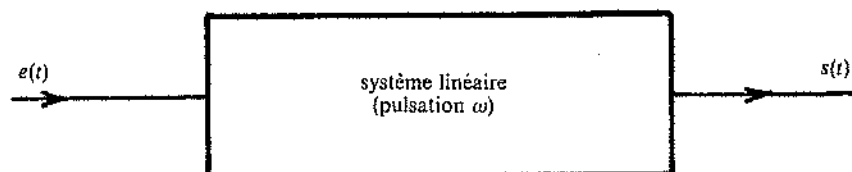


Fig. 7.5.

La relation entrée-sortie est une équation différentielle. Par exemple :

$$a_2 \ddot{s}(t) + a_1 \dot{s}(t) + a_0 s(t) = b_0 e(t)$$

$e(t)$ est sinusoïdale de pulsation ω , donc en régime permanent, $s(t)$ l'est aussi.

Appliquons $\mathcal{C}_\omega$: $a_2 \cdot (j\omega)^2 S + a_1 \cdot j\omega S + a_0 S = b_0 E$ d'où

$$\frac{S}{E} = \frac{b_0}{a_0 + a_1 \cdot j\omega + a_2(j\omega)^2} = H(j\omega) = \text{fonction de transfert.}$$

La fonction de transfert représente le rapport sortie sur entrée *dans l'espace* F (et jamais dans l'espace T_ω), elle caractérise le système. $H(j\omega)$, pour ω donné, est un nombre complexe qui ne dépend que des paramètres a_i et b_i du système.

4.2. Remarque importante

$\mathcal{C}_\omega$ ne permet pas de transposer dans l'espace F d'autres signaux que les signaux sinusoïdaux de pulsation ω .

Il faudra attendre $\mathcal{L}$ pour une généralisation.

En outre, lorsqu'un système est excité sous plusieurs fréquences ω_1 et ω_2 , on appliquera $\mathcal{C}_{\omega_1}$ aux signaux ω_1 , puis $\mathcal{C}_{\omega_2}$ aux signaux ω_2 .

Si le système est linéaire, on pourra superposer les réponses.

L'opérateur de dérivation $\frac{d}{dt}$, se traduit par la multiplication par $(j\omega)$.

En conséquence, il ne faut jamais séparer j de ω ; $\frac{1}{jC\omega}$ doit être préféré pour cela à $\frac{-j}{C\omega}$.

Les puissances paires en ω sont réelles.

Les puissances impaires sont imaginaires pures.

Ceci fournit un instrument de vérification précieux.

$s(t)$

exemple :

$s(t)$ l'est aussi.

CHAPITRE 8

LA TRANSFORMATION $\mathcal{L}$ TRANSFORMATION DE LAPLACE

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) fils d'un cultivateur normand, cofondateur avec Monge de l'École Polytechnique sous Bonaparte fut un homme politique discret et un scientifique de renom.

Contemporain de Fourier (1768-1830) qu'il connut à Polytechnique, il rédigea — entre autres publications — la théorie, objet de ce chapitre.

La transformation $\mathcal{L}$ généralise la transformation $\mathcal{C}$.

Elle fournit un puissant outil de résolution dans un espace « fréquentiel » de problèmes posés dans l'espace « temporel », sous forme d'équations différentielles linéaires et à coefficients constants.

La transformation $\mathcal{L}$ s'applique aux fonctions mais aussi aux distributions. Nous nous contenterons de celle de Dirac. Cela nous permettra de présenter la transformée $\mathcal{L}$ d'une dérivée de fonction discontinue, en nous appuyant sur les résultats évoqués dans le chapitre 2 consacré aux distributions.

1. DÉFINITION DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE (MONOLATÈRE) $\mathcal{L}$ (fig. 8.1)

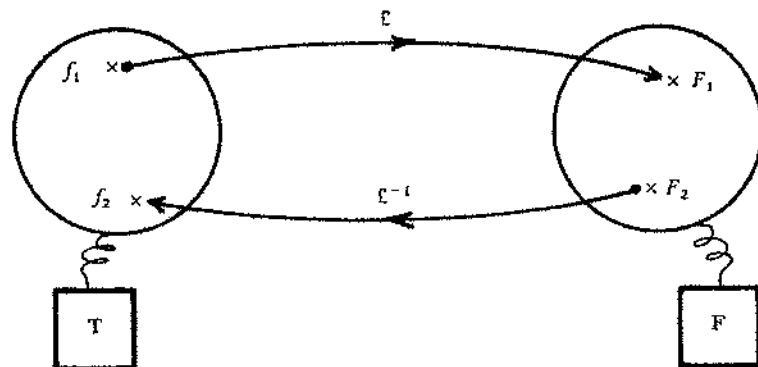


Fig. 8.1.

T est 1
Ces fo
Elles c
Elles 1
discontinu
F est 1
Ces fo
essentielle
Si néce
La tran

avec

$\mathcal{L}$ est di
définir une
 $F(p)$ n'e
[f(t), e
si f(t) est le
Selon f
Donc F

Exercice

Calculer
 $t < 0$.
 $\mathcal{L}[f] =$

La born
Mais e'
Quand
réelle en a u
Donc si

(*) Dans cet
p généralise la n

Test un ensemble de fonctions f_t .

Ces fonctions de la variable réelle t sont à valeurs réelles.

Elles croissent moins vite qu'une exponentielle quand $t \rightarrow \infty$.

Elles sont dérivables au sens de la dérivée généralisée (nombre fini de discontinuités à saut fini).

F est un ensemble de fonctions F_i .

Ces fonctions F_i de la variable complexe p , sont analytiques et à valeurs essentiellement complexes.

Si nécessaire on posera $p = \sigma + j\omega$ (*).

La transformée de Laplace $\mathcal{L}$ est une application de T dans F

$$f_t \in T \xrightarrow{\mathcal{L}} F_p \in F \quad F = \mathcal{L}[f]$$

avec

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$$

$\mathcal{L}$ est dite monolatère car l'intégrale s'étend de 0 à $+\infty$; il est possible de définir une transformée bilatère de $-\infty$ à $+\infty$.

$F(p)$ n'est transformée de $f(t)$ que si l'intégrale existe, c'est-à-dire si

$|f(t) \cdot e^{-pt}| = |f(t) \cdot e^{-\sigma t}|$ tend vers zéro quand t augmente indéfiniment, et si $f(t)$ est localement sommable.

Selon $f(t)$, ceci exige que σ soit assez grand, pour forcer le produit à décroître.

Donc $F(p)$ n'est l'image de $f(t)$ que pour $\operatorname{Re}(p) > \sigma_0$.

? Exercice

Calculer la transformée de f avec $f(t) = e^{at}$ pour $t > 0$ et inconnue pour $t < 0$.

$\mathcal{L}[f] = F$ avec :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{t(-p+a)t} dt = \frac{1}{-p+a} \cdot [e^{(-p+a)t}]_0^{+\infty}$$

La borne infinie pose problème.

Mais $e^{(-p+a)t} = e^{(-\sigma+a)t} \cdot e^{-j\omega t}$.

Quand $t \rightarrow \infty$ l'exponentielle imaginaire n'a pas de limite; l'exponentielle réelle en a une si $-\sigma + a < 0$, elle tend alors vers zéro.

Donc si $\operatorname{Re}(p) > a$

$$F(p) = \frac{1}{-p+a} (0 - 1) = \frac{1}{p-a}$$

(*) Dans certains ouvrages, notamment en langue anglaise, s désigne la variable ici nommée p . p généralise la notion de pulsation.

Bien que la notation soit impropre, on notera :

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{p-a} \quad (\operatorname{Re}(p) > a)$$

La bande du plan complexe à droite de a définit le domaine de p où $F(p)$ est image de $f(t)$: c'est le domaine d'absolue convergence de $f(t)$.



2. QUELQUES PROPRIÉTÉS

2.1. Linéarité

$$\mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g]$$

Ceci est une conséquence de l'intégrale de définition.

On prendra la zone d'absolue convergence la plus à droite, commune à f et à g .

2.2. Produit de convolution

Il convient de noter que $\mathcal{L}[f \cdot g]$ n'est pas $\mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g]$.

Par contre $\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g]$.

$f * g$ est le produit de convolution.

Nous démontrerons ce théorème après le théorème du retard.

2.3. Théorème du retard temporel (signal causal) $\tau > 0$ (fig. 8.2).

Soit $f : t \mapsto f(t)$ mais avec $f(t) = 0$ pour $t < 0$

et $g : t \mapsto g(t) = f(t - \tau)$ $g(t) = 0$ pour $t < \tau$.

Si $\mathcal{L}[f] = F(p)$ alors $\mathcal{L}[g] = e^{-p\tau} \cdot F(p)$.

En effet

$$\mathcal{L}[g] = \int_{\tau}^{+\infty} f(t - \tau) \cdot e^{-pt} dt \quad \text{puisque de } 0 \text{ à } \tau \quad f(t - \tau) = 0$$

En posant $t - \tau = x$ il vient

$$\mathcal{L}[g] = \int_0^{+\infty} f(x) \cdot e^{-p(x+\tau)} dx = e^{-p\tau} \cdot \int_0^{+\infty} f(x) e^{-px} dx$$

Il est bien clair que l'intégrale vaut $F(p)$, le nom x ou t de la variable d'intégration n'important pas.

2.4. Théorème

Cherchons la

On observe :
multiplication par
Ceci est très :

2.5. Revenons

Nous imposons
D'après la définition

$\mathcal{L}[f]$

l'intégrale de convolution.
Faisons entrer
l'ordre des intégrations,
soins, nous la supprimeons.

$\mathcal{L}[f]$

On reconnaît d'ailleurs
pour $t < x$ retardé

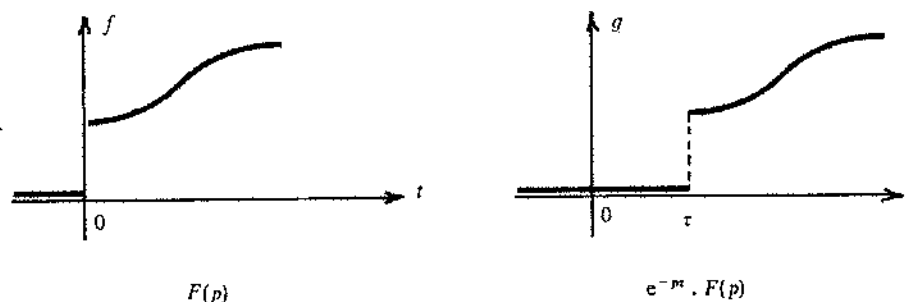


Fig. 8.2.

2.4. Théorème du retard fréquentiel

Cherchons la transformée de $e^{at} \cdot f(t)$. On trouve

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt \quad \text{soit} \quad F(p-a)$$

On observe ainsi qu'un « retard » a dans l'espace F a pour origine une multiplication par e^{at} dans l'espace T .

Ceci est très symétrique du théorème du retard temporel.

2.5. Revenons au produit de convolution $f * g$.

Nous imposons $f(t)$ causale (nulle pour $t < 0$) ainsi que $g(t)$.

D'après la définition du produit de convolution :

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x) \cdot g(t-x) dx \right) e^{-pt} dt$$

L'intégrale de convolution commence en 0 car $f(x) = 0$ pour $x < 0$.

Faisons entrer e^{-pt} dans l'intégrale de convolution et permutons ensuite l'ordre des intégrations. (La légalité de cette opération exigerait beaucoup de soins, nous la supposons assurée.)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f * g] &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot f(x) \cdot g(t-x) dt \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} f(x) \left(\int_0^{+\infty} e^{-pt} g(t-x) dt \right) dx \end{aligned}$$

On reconnaît dans l'intégrale intérieure la transformée d'une fonction (nulle pour $t < x$) retardée; d'après le théorème du retard on aura :

$$= \int_0^{+\infty} f(x) \cdot e^{-px} \cdot G(p) dx$$

$$= G(p) \cdot \int_0^{+\infty} f(x) \cdot e^{-px} dx$$

$$\boxed{\mathcal{L}[f * g] = G(p) \cdot F(p)} \\ \text{pour } f \text{ et } g \text{ causales.}$$

Le produit de convolution est transformé en un produit simple.

L'application aux systèmes linéaires est immédiate. Nous avons vu que la réponse (causale) d'un S.L.T.I. partant du repos, à une excitation causale $e(t)$ est $s(t) = (h * e)(t)$ où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle (causale) du système.

On a donc $\boxed{S(p) = H(p) \cdot E(p)}$ $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ généralise la fonction de transfert vue avec $\mathcal{L}$.

2.6. Transformé de Laplace de la distribution δ .

La transformée de Laplace des distributions dépasse le cadre de ce cours.

En ce qui concerne δ , on peut écrire formellement ; (ceci revient à considérer la « fonction $\delta(t)$ » et à tenter une pseudodémonstration)

$$\mathcal{L}[\delta] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot \delta(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} \cdot \delta(t) dt \quad \text{car } \delta(t) \text{ est nulle pour } t < 0$$

$$\text{D'après chap. 2 § 5, } e^{-pt} \cdot \delta(t) = (e^{-pt})_{t=0} \cdot \delta(t) = 1 \cdot \delta(t)$$

$$\text{d'où } \mathcal{L}[\delta] = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \delta(t) dt \text{ qui vaut 1 d'après chap. 2, § 4.}$$

$$\text{Ainsi } \mathcal{L}[\delta] = 1.$$

3. TRANSFORMÉE DE LAPLACE DE LA DÉRIVÉE

Soit une fonction f dérivable pour $t > 0$, elle peut être discontinue pour $t = 0$ (par exemple l'échelon).

3.1. Transformée de $\dot{f}$

$$\text{Par définition } \mathcal{L}[\dot{f}] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot \dot{f}(t) dt.$$

En intégrant par parties il vient

$$\mathcal{L}[\dot{f}] = [e^{-pt} \cdot f(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -pe^{-pt} \cdot f(t) dt$$

A l'infini e^{-pt} peut sortir p de

Dans cette f

3.2. Transform

C'est-à-dire e
Nous allons
rigueur est extrê
Supposons de
Nous savons (

qui exprime en q
discontinues.

$[f]'$ serait la d
La linéarité de
 $\mathcal{L}([f]')$

car $\mathcal{L}[f']$ est la t
d'autre part $\mathcal{L}[\delta]$

On a donc $\mathcal{L}[\delta]$

La transformée
 $f(0^-)$; elle est génér

Si f est continu

Si f est discon

distributions, admet

Si $f(t)$ est causal

Il convient d'obs

Désormais nous

Ainsi, si la fonctio
les impulsions de Dir



A l'infini e^{-pt} est nul puisque $\operatorname{Re}(p) = \sigma > \sigma_0$, et en remarquant que l'on peut sortir p de l'intégrale qui devient la transformée de la fonction f , on a :

$$\mathcal{L}[f'] = p\mathcal{L}[f] - f(0)$$

Dans cette formule $f(0) = f(0^+)$ car l'intervalle d'intégration est $t > 0$.

3.2. Transformée de la dérivée prise au sens des distributions

C'est-à-dire en fait : « Transformée de la dérivée d'une distribution ».

Nous allons donner une version de ce point, qui malgré son manque de rigueur est extrêmement utile pour résoudre des équations différentielles.

Supposons donc f discontinue en 0 et dérivable en $t > 0$.

Nous savons (équation 2.4 chap. 2, § 6) que

$$[f]' = [f'] + (f(0^+) - f(0^-)) \cdot \delta(t)$$

qui exprime en quelque sorte une « généralisation » de la dérivée aux fonctions discontinues.

$[f]'$ serait la dérivée de la « fonction discontinue » f .

La linéarité de la transformation implique :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}([f]') &= \mathcal{L}([f']) + (f(0^+) - f(0^-)) \cdot \mathcal{L}[\delta] \\ &= p\mathcal{L}[f] - f(0^+) + (f(0^+) - f(0^-)) \cdot 1 \end{aligned}$$

car $\mathcal{L}[f']$ est la transformée de la fonction dérivée f' vue § 3.1 d'une part, et d'autre part $\mathcal{L}[\delta] = 1$.

On a donc $\mathcal{L}([f]') = p\mathcal{L}(f) - f(0^-)$

La transformée de la dérivée (prise au sens des distributions) fait intervenir $f(0^-)$; elle est générale.

Si f est continu, $f(0^+) = f(0^-)$, on revient au cas vu § 3.1.

Si f est discontinue à l'origine, la dérivée généralisée, par le biais des distributions, admet bien une transformée.

Si $f(t)$ est causale, alors $f(0^-) = 0$; la formule est simplifiée.

Il convient d'observer une règle constante.

Désormais nous dérivons *toujours* au sens des distributions.

Ainsi, si la fonction présente des discontinuités simples, sa dérivée présentera les impulsions de Dirac correspondantes.

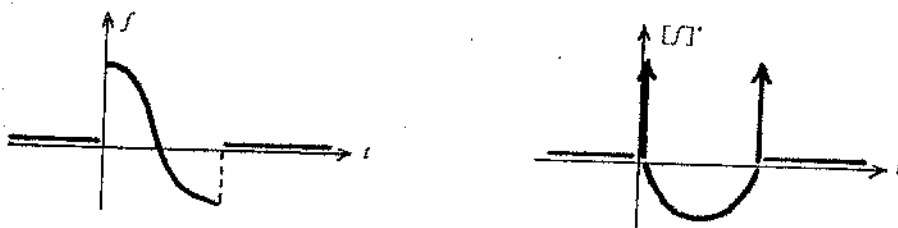


Fig. 8.3.

3.3. Remarque

Considérons $g(t) = \int_0^t f(x) dx$; comme $\dot{g}(t) = f(t)$ on a :

$$p \cdot G(p) - g(0^-) = F(p)$$

donc $G(p) = \frac{1}{p} \cdot F(p)$ puisque $g(0^-) = g(0) = 0$

L'opérateur de dérivation est p .

L'opérateur d'intégration est $\frac{1}{p}$

4.4. Expon.

L'exposant traduit (chap.

vaut $\frac{1}{p}$.

D'où $\mathcal{L}[e^a]$

on déduit :

4. LES TRANSFORMÉES DES SIGNAUX-TEST

4.1. Échelon-unitaire $\Gamma(t)$

$$\mathcal{L}[\Gamma] = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

dès que $\sigma > 0$.

Il convient d
que pour $t > 0$
transformée, mêm

? Applications

Trouver la tr.

4.2. Impulsion de Dirac $\delta(t)$

$\delta(t) = \dot{\Gamma}(t)$ (la dérivation est prise au sens général des distributions, comme nous l'avons dit)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\delta] &= \mathcal{L}[\dot{\Gamma}] = p\mathcal{L}[\Gamma] - \Gamma(0^-) \\ &= p \cdot \frac{1}{p} - 0 = 1 \end{aligned}$$

Il faut en effet voir δ comme la dérivée au sens des distributions de l'échelon unitaire. Le résultat confirme ce que nous attendions.

Il suffit de ren
l'un est retardé (fi

4.3. Rampe unitaire ($t > 0$)

$$r(t) = \int_0^t \Gamma(x) dx \text{ puisque } r(t) = t \text{ pour } t > 0$$

$$\mathcal{L}[r] = \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{1}{p} \right) = \frac{1}{p^2}$$

On trouve alors

4.4. Exponentielle e^{at} ($t > 0$)

L'exponentielle causale e^{at} s'écrit : $e^{at} \cdot \Gamma(t)$. La multiplication par e^{at} se traduit (chap. 2, § 2) par un « retard » fréquentiel de la transformée de $\Gamma(t)$ qui vaut $\frac{1}{p}$.

D'où $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{p-a}$ (déjà vu également) et

$$\mathcal{L}[e^{j\omega_0 t}] = \frac{1}{p - j\omega_0}$$

on déduit :

$$\mathcal{L}[\sin \omega_0 t] = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos \omega_0 t] = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$$

Il convient de bien observer que les fonctions de l'ensemble T ne sont définies que pour $t > 0$; ainsi deux fonctions f_1 et f_2 égales pour $t > 0$ ont même transformée, même si elles diffèrent pour $t < 0$.

? Applications

Trouver la transformée de la fonction f

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{pour } 0 < t < t_0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Il suffit de remarquer que $f(t)$ est la somme de deux échelons f_1 et f_2 dont l'un est retardé (fig. 8.4).

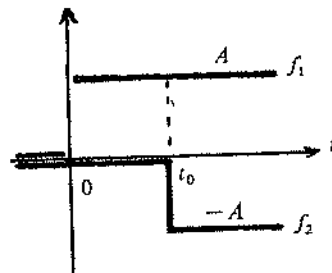


Fig. 8.4.

On trouve alors : $F(p) = \frac{A}{p} (1 - e^{-pt_0})$ car

$$\mathcal{L}[f_1] = \frac{A}{p} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}[f_2] = -\frac{A}{p} e^{-pt_0}$$

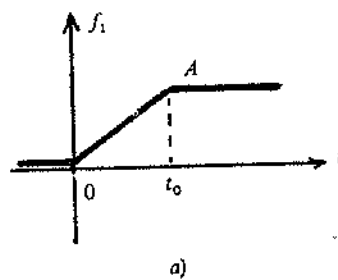
? Exercices

Trouvez les transformées de f_1 et de f_2 dont les graphes sont les suivants (fig. 8.5a et 8.5b).

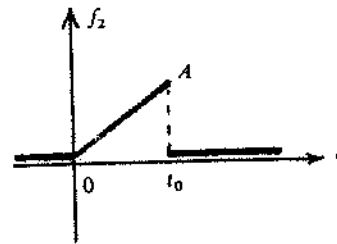
En employant la méthode vue ci-dessus on trouve :

$$F_1(p) = \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{p^2} (1 - e^{-pt_0})$$

$$F_2(p) = F_1(p) - \frac{A}{p} e^{-pt_0}$$



a)



b)

Fig. 8.5.

5. LES THÉORÈMES DE LA VALEUR INITIALE ET FINALE

5.1. Énoncé

$$a) f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

$$b) f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p), \text{ si la limite existe.}$$

Cette limite $f(\infty)$ existe à condition que $F(p)$ ait :

- tous ses pôles (*) à partie réelle négative,
- ou au plus un pôle à l'origine, les autres étant à partie réelle négative.

La démonstration de a) est facile à partir de la transformée de la dérivée.
La démonstration de b) est plus délicate.

5.2. Remarque

La correspondance entre t et p vaut d'être notée.

Très souvent on limite les valeurs que peut prendre la variable p aux valeurs imaginaires pures $p = j\omega = j2\pi f$.

(*) On appelle pôle de $F(p)$ une valeur de p qui rendrait $F(p)$ infinie. $\frac{1}{(p-1)(p+2)}$ a deux pôles, l'un est (1), l'autre (-2).

Le régime.
Le régime.
On peut

La transfo
à coefficients
Donnons

Il convien
En applic

La donnée
L'utilisati
(uniquement)

L'écriture
en électricité.
Nous all
en tenant co
Transform

Pour une

(*) Le tablea

Le régime permanent ($t \rightarrow \infty$) correspond aux basses fréquences ($p \rightarrow 0$).
 Le régime transitoire ($t \rightarrow 0$) correspond aux hautes fréquences ($p \rightarrow \infty$).
 On peut aussi à l'aide de tables trouver l'original de $F(p)$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p)] = f(t) \cdot F(t)$$

6. APPLICATION A LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

La transformation de Laplace permet la résolution des équations linéaires et à coefficients constants.

Donnons un exemple

$$\begin{cases} T\dot{y}(t) + y(t) = f(t) \\ y(0^-) = y_0 \end{cases}$$

Il convient de remarquer que c'est $y(0^-)$ qui est donnée et non $y(0^+)$.
 En appliquant la transformation $\mathcal{L}$ à l'équation il vient :

$$T(p \cdot Y(p) - y_0) + Y(p) = F(p)$$

$$\text{donc } Y(p) = \frac{F(p)}{1 + Tp} + \frac{Ty_0}{1 + Tp}$$

La donnée de $f(t)$ permet de déterminer $F(p)$ et donc $Y(p)$.

L'utilisation d'un tableau de transformées (*) permet de retrouver alors $y(t)$ (uniquement pour $t > 0$).

7. DES SCHÉMAS ÉQUIVALENTS FORT UTILES EN ÉLECTRICITÉ

L'écriture systématique des équations différentielles devient vite fastidieuse en électricité.

Nous allons généraliser la notion d'impédance vue avec la transformation $\mathcal{C}$, en tenant compte également des conditions initiales.

Transformons par $\mathcal{L}$ les lois temporelles de l'électricité.

Pour une résistance R on a :

$$v(t) = R \cdot i(t) \quad \text{qui devient} \quad V(p) = R \cdot I(p)$$

(*) Le tableau des transformées est à la fin de cet ouvrage.

Pour une self L on a :

$$v(t) = L \frac{di}{dt} \text{ qui devient } V(p) = L(pI(p) - i(0^-))$$

$$\text{soit } I(p) = \frac{V}{Lp} + \frac{i(0^-)}{p}$$

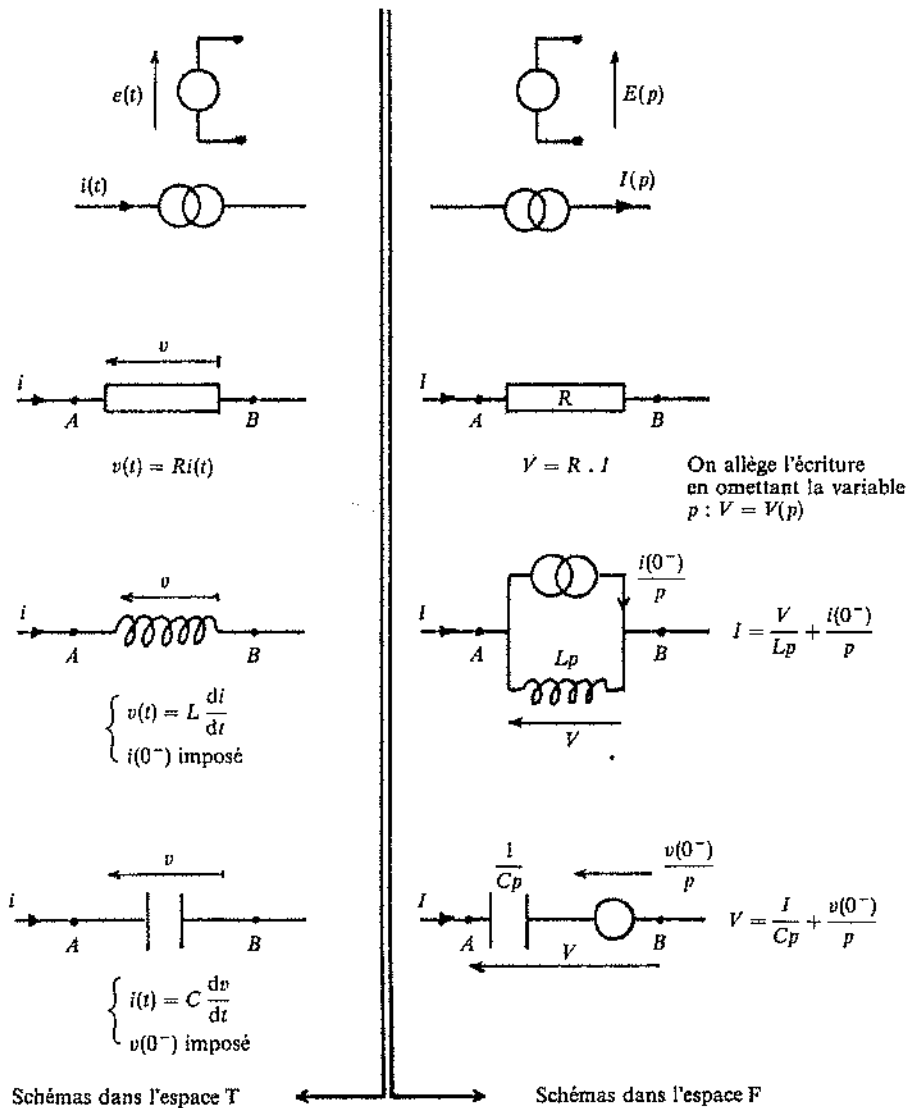


Fig. 8.6.

Pour un

Il est facile
Par ailleurs
Millman, K
manière hab
Les sché
dans l'espace
Par exemple
est la somme

Le courant

Le courant

? Exercice résolu

On considère

par transistor

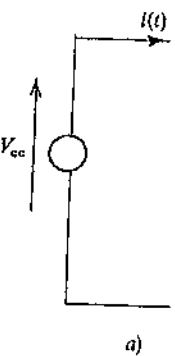
Avant $t = 0$

Après $t = 0$

On a

$v(0^-) = 0$ et

Faisons le
pour $t > 0$,
d'équivalence.



Pour une capacité C on a :

$$i(t) = C \cdot \frac{dv}{dt} \text{ qui devient } I(p) = C(pV(p) - v(0^-))$$

$$\text{soit } V(p) = \frac{I}{Cp} + \frac{v(0^-)}{p}.$$

Il est facile d'exprimer sur un schéma les lois écrites dans l'espace F (fig. 8.6).

Par ailleurs les théorèmes démontrés dans les cours d'électricité (Thévenin, Millman, Kennelly etc...), restent valables et l'étude des circuits est conduite à la manière habituelle avec les nouvelles impédances en p .

Les schémas (page 64) donnent les correspondances des schémas temporels, dans l'espace de Laplace.

Par exemple pour une self, la formule de Laplace trouvée, montre que $I(p)$ est la somme de deux courants :

Le courant $\frac{V}{Lp}$ symbolisé par l'impédance Lp .

Le courant $\frac{i(0^-)}{p}$ symbolisé par un générateur de courant.

? Exercice résolu

On considère le circuit de la figure 8.7 a; il représente une commande de relais par transistor fonctionnant comme un interrupteur supposé parfait.

Avant $t = 0$, le transistor est saturé (interrupteur fermé).

Après $t = 0$, le transistor est bloqué (interrupteur ouvert).

On a donc :

$$v(0^-) = 0 \text{ et } i(0^-) = \frac{V_{cc}}{r} \text{ le courant initial dans le self.}$$

Faisons le dessin dans l'espace F , (fig. 8.7 b) du circuit « temporel » qu'on a pour $t > 0$, l'interrupteur étant donc ouvert. On applique strictement les règles d'équivalence.

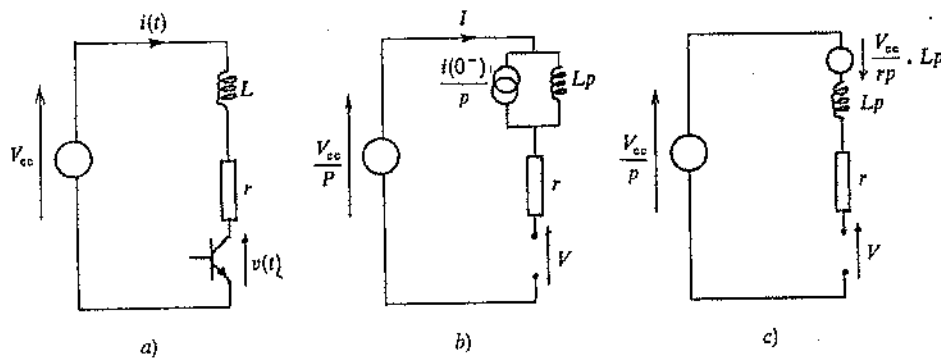


Fig. 8.7.

$\frac{V_{CC}}{p}$ est transformée de V_{CC} (échelon pour $t > 0$).

La self L , parcourue par le courant initial $\frac{V_{CC}}{r}$ présente donc un générateur du courant initial.

Remplaçons le circuit parallèle de la self, en circuit série à l'aide du théorème de Thévenin (fig. 8.7 c).

On a $V(p) = \frac{V_{CC}}{p} + \frac{V_{CC}}{r} \cdot L$ d'où on déduit :

$$v(t) = V_{CC} + \frac{V_{CC}}{r} \cdot L \cdot \delta(t)$$

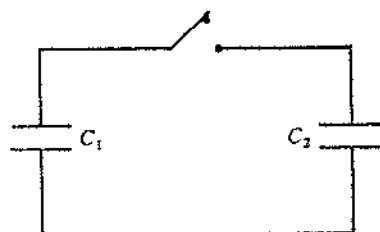
Nous remarquons la présence d'une impulsion de Dirac positive de poids $\frac{V_{CC} \cdot L}{r}$ qui est susceptible de « claquer » le transistor.

? Exercice résolu

A l'instant $t = 0$, deux condensateurs chargés, sont mis en communication par un interrupteur sans résistance (fig. 8.8).

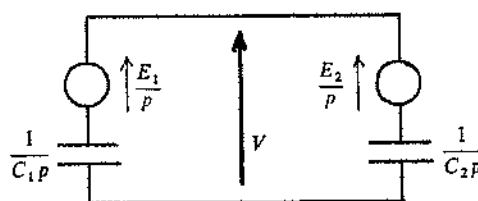
Calculer mathématiquement la situation finale.

E_1 et E_2 sont les tensions initiales aux bornes des deux condensateurs.



dans T (avant $t = 0$)

a)



dans F (pour $t > 0$ - interrupteur fermé)

b)

Fig. 8.8.

Le théorème de Millmann donne immédiatement :

$$V = \frac{\frac{E_1}{p} \cdot C_1 p + \frac{E_2}{p} \cdot C_2 p}{C_1 p + C_2 p} = \frac{E_1 C_1 + E_2 C_2}{(C_1 + C_2)p}$$

$$\text{d'où pour } t > 0, v(t) = \frac{E_1 C_1 + E_2 C_2}{C_1 + C_2}.$$

On constate au passage que la tension aux bornes des condensateurs est, dans ce cas idéal, discontinue.

? Exercice

- Repre
- Le lec
- en mettan
- Pour
- Pour
- d'une cen
- r repr
- Fai
- Cal
- En

Le cal
le théorèm

f nulle pou
($\tau > 0$)

? Exercice à résoudre

Reprendre le relais commandé par transistor.

Le lecteur pourra s'apercevoir qu'on peut supprimer l'impulsion de claquage en mettant une diode (dite de roue libre) aux bornes du relais (fig. 8.9).

Pour $t < 0$, la diode en inverse a une résistance infinie.

Pour $t > 0$, la diode en direct est supposée posséder une résistance R fixe d'une centaine d'ohm.

r représente la résistance de la bobine.

- Faire le schéma dans F , (pour $t > 0$).
- Calculez $V(p)$.
- En déduire $v(t)$.

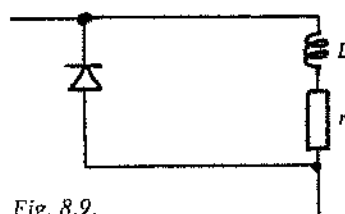


Fig. 8.9.

Le calcul, plus complexe que celui déjà fait, est tout à fait à portée. Employez le théorème de Thévenin.

8. TRANSFORMÉE DE LAPLACE

Tableau Résumé

Espace T temps $t > 0$	$\mathcal{L}$ $\downarrow$	Espace F fréquence généralisée p , à partie réelle $\sigma > \sigma_0$
f	$\mathcal{L}$	F
$f(t)$		$F(p)$
$\dot{f}(t)$		$pF(p) - f(0^-)$
f nulle pour $t < \tau$ ($\tau > 0$)		$e^{-p\tau} \cdot F(p)$
$f(t - \tau)$		$F(p - a)$
$e^{at} \cdot f(t)$		
$\delta(t)$		1
$\Gamma(t)$		$\frac{1}{p}$
t^n		$\frac{1}{p^{n+1}}$
e^{-bt}		$\frac{1}{p + b}$ élément simple
$f(0^+)$		$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$
$f(\infty)$		$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$

CHAPITRE 9

LA TRANSFORMATION z TRANSFORMÉE EN z DES SIGNAUX NUMÉRIQUES

La transformée en z est relative aux suites numériques.

Elle permet de ce fait un traitement des signaux et systèmes numériques et des systèmes échantillonnés, analogue à celui que permet la transformée de Laplace pour les signaux à temps continu.

1. LE SIGNAL NUMÉRIQUE $[s(k)]$

Considérons une fonction s qui à tout entier $k \in [k_1, k_2]$ fait correspondre un nombre réel $s(k)$ (fig. 9.0 a).

Par exemple les « gains » $s(k)$ d'un joueur à l'issue de la k -ième partie.

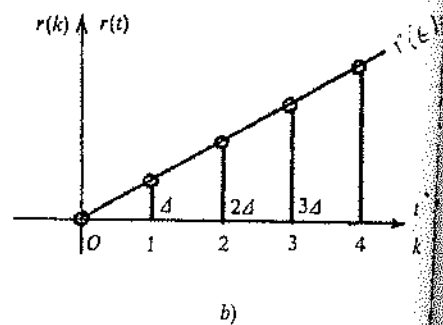
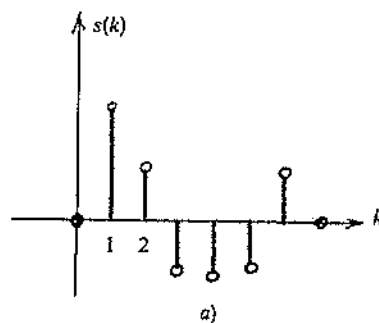


Fig. 9.0.

La fonction s , notée $[s(k)]$ pour rappeler le caractère discret de la variable, est dite suite, ou signal numérique.

Dans cet exemple, k est le numéro (arbitraire) de la partie, l'intervalle de temps entre deux parties n'intervient pas, il peut être irrégulier.

Dans d'autres exemples, $s(k)$ sera prélevé par échantillonnage régulier au pas Δ de $s(t)$ à temps continu :

$$r(t) = at \quad \text{donne} \quad r(k\Delta) = r(k) = a \cdot k\Delta$$

où k est le numéro de l'échantillon. Dans ce cas $t = k\Delta$ (fig. 9.0 b).

On écrira $r(k\Delta)$ pour souligner ce fait, ou plus simplement $r(k)$.

Comme pour la transformée de Laplace, il existe une classe importante de signaux, les signaux causals qui sont nuls pour $k < 0$ (et non pas $k \leq 0$).

2. DÉFINITION DE LA TRANSFORMÉE EN z (MONOLATÈRE) $\mathcal{Z}$ (fig. 9.1)

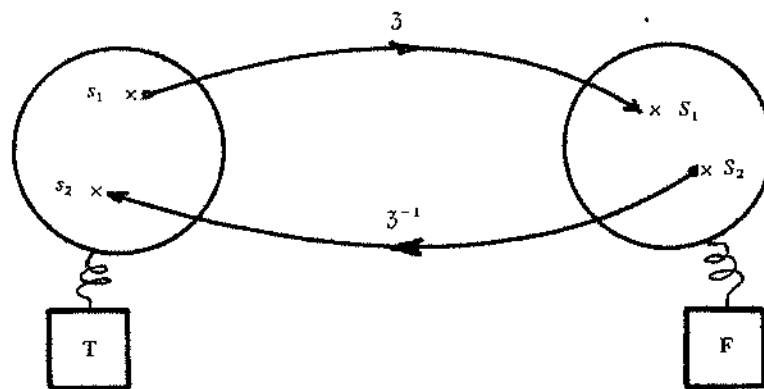


Fig. 9.1.

T est un ensemble de fonctions s_k .

Ces fonctions de la variable entière k , sont à valeurs réelles.

F est un ensemble de fonctions S_z .

Ces fonctions de la variable complexe z sont à valeurs complexes.

La transformée en z (monolatère) est une application de T dans F ,

$$s_{k \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{Z}} S_{z \in \mathbb{C}} \quad S = \mathcal{Z}[s]$$

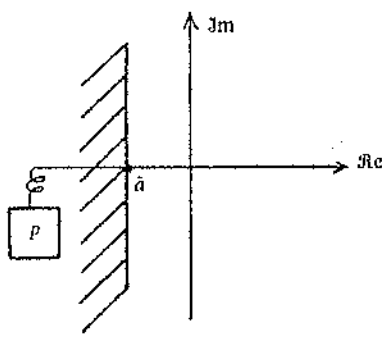
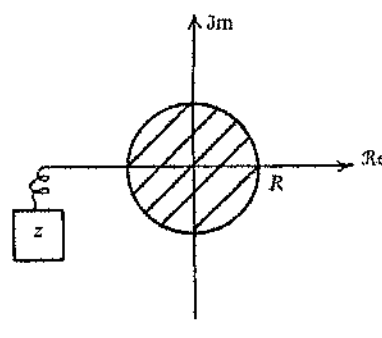
telle que

$$S(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} s(k) \cdot z^{-k}$$

La transformée est monolatère car la sommation s'étend de 0 à $+\infty$. Il est possible de définir une transformée bilatère de $-\infty$ à $+\infty$.

$S(z)$ n'existe que si la série est convergente. Il faut donc que $|z^{-1}|$ soit assez petit, donc que $|z|$ soit assez grand.

Ceci est à comparer avec la transformation $\mathcal{L}$.

Transformation $\mathcal{L}$	Transformation $\mathcal{Z}$
$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t) \cdot e^{-pt} dt$ si $\operatorname{Re}(p) \geq a$  a : abscisse de convergence	$S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(k) \cdot z^{-k}$ si $z > R$  R : rayon de convergence

? Exemple

Calculer la transformée en $\mathcal{Z}$ de f avec

$$[f(k)] = a^k \text{ pour } k \geq 0 \text{ et inconnue pour } k < 0$$

$$\mathcal{Z}[f] = F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k$$

la série est donc la série géométrique $1 + \frac{a}{z} + \dots + \left(\frac{a}{z}\right)^n + \dots$ qui vaut

$$F(z) = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a} \quad \text{si} \quad \left|\frac{a}{z}\right| < 1$$

On note donc que la transformée en z de la progression géométrique a^k existe et vaut (la notation est impropre, mais usuelle)

$$\mathcal{Z}[a^k] = \frac{z}{z - a} \quad \text{si} \quad |z| > a$$

Remarque :

Le signal $s(k)$ prélevé par échantillonnage sur l'exponentielle $e^{-t/T}$ vaut

$$s(k) = e^{-k \frac{d}{T}} = \left(e^{-\frac{d}{T}}\right)^k$$

donc $S(z) = \frac{z}{z - e^{-\frac{d}{T}}}$ est sa transformée en z .

3.1. Linéar

ceci résulte d
rayon de con

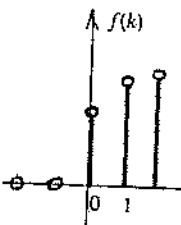
3.2. Produi

La transfo
produit des tr
Par contre

Nous démontrons

3.3. Théorème

Soit $f : k \mapsto$
et $g : k \mapsto$



Calculons $G(z)$

puisque $g(i) = (e^{-\frac{d}{T}})^i$

En posant $j = e^{-\frac{d}{T}}$

$G(z) =$

3. QUELQUES PROPRIÉTÉS

3.1. Linéarité

$$\mathcal{Z}[a \cdot f + b \cdot g] = a\mathcal{Z}[f] + b\mathcal{Z}[g]$$

ceci résulte de la définition sous forme de somme infinie. On prendra comme rayon de convergence le plus grand.

3.2. Produit de convolution de deux signaux f et g

La transformée en z du produit de deux signaux numériques n'est pas le produit des transformées.

Par contre

$$\mathcal{Z}[f * g] = \mathcal{Z}[f] \cdot \mathcal{Z}[g]$$

Nous démontrerons cela après le théorème du retard.

3.3. Théorème du retard temporel (signal causal) (fig. 9.2)

Soit $f : k \mapsto f(k)$, $f(k) = 0$ pour $k < 0$ (causal)
et $g : k \mapsto g(k) = f(k - k_0)$, $g(k) = 0$ pour $k < k_0$ ($k_0 > 0$)

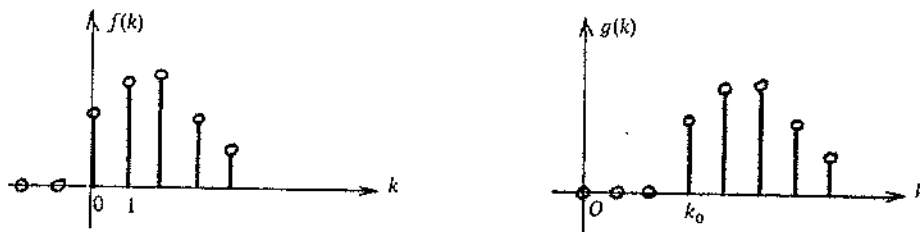


Fig. 9.2.

Calculons $G(z)$ la transformée en z de la fonction g .

$$G(z) = \sum_{i=0}^{\infty} g(i) \cdot z^{-i} = \sum_{i=k_0}^{\infty} f(i - k_0) \cdot z^{-i}$$

puisque $g(i) = 0$ sur les premiers échantillons.

En posant $j = i - k_0$, il vient :

$$G(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f(j) \cdot z^{-j-k_0} = z^{-k_0} \sum_{j=0}^{\infty} f(j) \cdot z^{-j} = z^{-k_0} \cdot F(z)$$

Ainsi :

Retarder un signal causal de k_0 échantillons revient à multiplier sa transformée en z par z^{-k_0} .

Ceci est à rapprocher du théorème du retard des fonctions à temps continu établi lors de l'étude de la transformation $\mathcal{L}$.

? Exemple

$\frac{z}{z-a}$ est la transformée du signal causal $\begin{cases} a^n & \text{pour } n \geq 0 \\ 0 & \text{pour } n < 0 \end{cases}$

$\frac{1}{z(z-a)} = z^{-2} \cdot \frac{z}{z-a}$ est la transformée du signal causal $[a^n]$ retardé de 2 coups, soit le signal

$$\begin{cases} a^{n-2} & \text{pour } n \geq 2 \\ 0 & \text{pour } n < 2 \end{cases} = a^{n-2} \cdot \Gamma(n-2)$$

3.4. Revenons au produit de convolution $f * g$

Nous supposons que f et g sont causales.

En ce cas

$$(f * g)(k) = \sum_{i=0}^{k} f(i) \cdot g(k-i) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i) \cdot g(k-i)$$

puisque $g(k-i) = 0$ pour $k < i$.

Cherchons la transformée en z du produit de convolution

$$\mathcal{Z}[f * g] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} f(i) \cdot g(k-i) \right) z^{-k}$$

Faisons entrer z^{-k} sous la sommation en i puis permutons l'ordre des sommations (ce que nous admettons légitime)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f * g] &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(i) \cdot g(k-i) \cdot z^{-k} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} f(i) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} g(k-i) \cdot z^{-k} \end{aligned}$$

On reconnaît dans la deuxième sommation la transformée en z du signal g retardé (car nul pour $k < i$) de i coups, donc

$$\mathcal{Z}[f * g] = \sum_{i=0}^{\infty} f(i) \cdot z^{-i} \cdot G(z) = G(z) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} f(i) \cdot z^{-i}$$

$$\boxed{\mathcal{Z}[f * g] = G(z) \cdot F(z)} \quad \text{pour } f \text{ et } g \text{ causales.}$$

Le produit de convolution dans T , est transformé en produit simple dans F . L'application aux systèmes linéaires est immédiate.

Soit un système numérique au repos et $h(n)$ sa réponse impulsionnelle (causale).
Si ce système est excité par une entrée $e(n)$ (causale), sa sortie sera $s(n)$ avec :

$$s(n) = (h * e)(n)$$

On aura donc, avec des notations évidentes :

$$\boxed{S(z) = H(z) \cdot E(z)} \quad H(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$$

est la fonction de transfert du système numérique.

3.5. Multiplication par a^k

Soit un signal $s(k)$ dont la transformée en z est $S(z)$ pour $|z| > R$.
Cherchons la transformée de $a^k \cdot s(k)$.

$$\mathcal{Z}[a^k \cdot s(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} s(k) \cdot a^k \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} s(k) \cdot \left(\frac{z}{a}\right)^{-k} = S\left(\frac{z}{a}\right)$$

sous réserve que $\left|\frac{z}{a}\right| > R$.

? Appliquons ce théorème

Nous avons vu que la fonction f telle que $f(k) = a^k$ a pour transformée :

$$F(z) = \frac{z}{z-a} = \frac{z/a}{z/a-1}$$

Donc la fonction $G(z) = \frac{z}{z-1}$ est transformée de $g(k)$ telle que
 $a^k \cdot g(k) = f(k) = a^k$, on en déduit $g(k) = 1$ quel que soit k .

4. DÉCALAGE DES SIGNAUX NON CAUSALS (fig. 9.3)

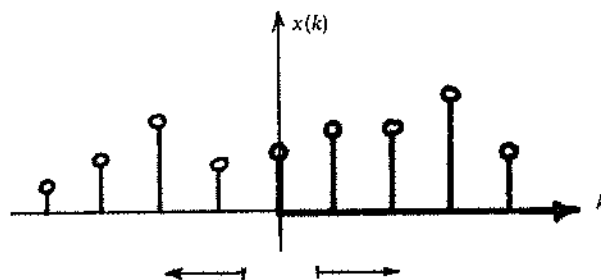


Fig. 9.3.

Le décalage à droite d'un signal non causal fait apparaître de nouveaux échantillons dans la zone $k > 0$.

Le décalage à gauche en fait disparaître.

Ceci influence bien sûr, la transformée en z .

Soit un signal $x(k)$ de transformée $X(z)$.

Formons $y(k) = x(k + k_0)$, et cherchons $Y(z)$.

On a

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k + k_0) \cdot z^{-k},$$

soit en posant $i = k + k_0$

$$Y(z) = \sum_{i=k_0}^{\infty} x(i) \cdot z^{-i+k_0} = z^{k_0} \sum_{i=k_0}^{\infty} x(i) \cdot z^{-i} \quad (9.0)$$

4.1. Retard du signal. Décalage à droite $k_0 < 0$

Posons $k_0 = -k_1$ ($k_1 > 0$)

$$Y(z) = z^{-k_1} \left(\sum_{i=-k_1}^{\infty} x(i) \cdot z^{-i} \right)$$

Isolons les termes d'indices négatifs, il vient

$$Y(z) = z^{-k_1} \left(\underbrace{\sum_{i=-k_1}^{-1} x(i) \cdot z^{-i}}_{\text{échantillons gagnés}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} x(i) \cdot z^{-i}}_{3[x]} \right)$$

On aura

$$Y(z) = z^{-k_1} [X(z) + x(-1) \cdot z^1 + x(-2) \cdot z^2 + \dots + x(-k_1) \cdot z^{k_1}]$$

4.2. Avance du signal. Décalage à gauche $k_0 > 0$

Dans la formule (9.0), la sommation commence en k_0 , donc il manque des échantillons. Ajoutons-les et retranchons-les. On aura :

$$Y(z) = z^{k_0} \left(\sum_{i=k_0}^{\infty} \dots \right) = z^{k_0} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \dots - \sum_{i=0}^{k_0-1} \dots \right)$$

donc

$$Y(z) = z^{k_0} [X(z) - x(0) \cdot z^0 - x(1) \cdot z^{-1} - \dots - x(k_0 - 1) \cdot z^{-(k_0-1)}]$$

Ainsi, l'avance du signal $x(k)$ de k_0 coups, se traduit par deux modifications :

- Une multiplication de sa transformée par z^{k_0} .
- Il faut retrancher de la transformée la contribution des échantillons perdus.

On retien
transformée

« L'appar
que l'on « ajc

Dans le c
théorème du

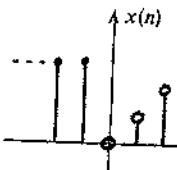
Exemple (fig.

Soit $x(n)$

Un tableau

Le signal

Le signal :



5. TRA

5.1. Dirac $\delta(k)$

3[

Ce résultat tré

5.2. Échelon I

3[

On retiendra que le retard de k_1 coups se traduit par une multiplication de la transformée par z^{-k_1} .

« L'apparition » des échantillons d'indice négatif dans la translation, implique que l'on « ajoute » la contribution de ces échantillons « gagnés ».

Dans le cas d'un signal causal $x(-1) = x(-2) = \dots = 0$ on retrouve le théorème du retard causal.

Exemple (fig. 9.4)

$$\text{Soit } x(n) = \begin{cases} 2 & \text{pour } n < 0 \\ an & \text{pour } n \geq 0 \end{cases}$$

Un tableau de transformées donne

$$X(z) = \frac{az}{(z-1)^2}$$

Le signal $x(n-2)$ aura comme transformée :

$$z^{-2} \left(\frac{az}{(z-1)^2} + 2z^1 + 2z^2 \right)$$

Le signal $x(n+1)$ aura comme transformée

$$z^{+1} \left(\frac{az}{(z-1)^2} \right)$$

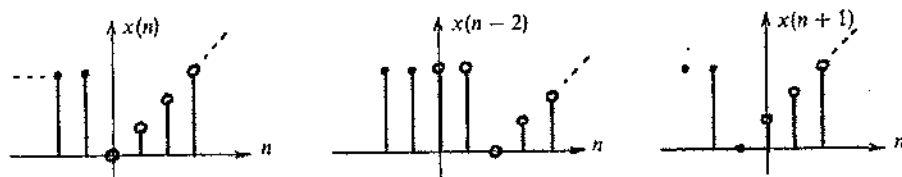


Fig. 9.4.

5. TRANSFORMÉE EN z DES FONCTIONS TEST

5.1. Dirac $\delta(k)$

$$\mathcal{Z}[\delta] = \sum_{i=0}^{\infty} \delta(i) \cdot z^{-i} = 1 \quad \text{car } \delta(i) = 0 \quad \text{pour } i \neq 0$$

Ce résultat très simple est à rapprocher de la transformée de Laplace de $\delta(t)$.

5.2. Échelon $\Gamma(k)$

$$\mathcal{Z}[\Gamma] = \sum_{i=0}^{\infty} \Gamma(i) \cdot z^{-i} = 1 + z^{-1} + \dots + z^{-n} + \dots$$

La série converge, si $|z^{-1}| < 1$, vers $\frac{1}{1-z^{-1}}$

$$\mathcal{Z}[f] = \frac{z}{z-1} \quad \text{si } |z| > 1.$$

5.3. Rampe unité $r(k)$

$$\mathcal{Z}[r] = \sum_{i=0}^{\infty} r(i) \cdot z^{-i} = 0 + z^{-1} + 2 \cdot z^{-2} + \dots + nz^{-n} + \dots$$

Reprenons la série $1 + z^{-1} + \dots + z^{-n} + \dots = \frac{z}{z-1}$.

Dérivons et admettons que la série dérivée converge vers la dérivée de la série nous aurons :

$$-(z^{-2} + 2z^{-3} + \dots + nz^{-n-1} + \dots) = \frac{-1}{(z-1)^2}$$

donc en multipliant les deux membres par $-z$ on aura

$$\mathcal{Z}[r] = z^{-1} + 2z^{-2} + \dots + n \cdot z^{-n} + \dots = \frac{z}{(z-1)^2}$$

5.4. Exponentielle $[a^k]$

On a déjà vu que $\mathcal{Z}[a^k] = \frac{z}{z-a}$ (§ 2 : exemple).

Nous donnons en annexe un tableau des principales transformées qui évite ces calculs.

La lecture de ce tableau se fait dans les deux sens, mais les signaux numériques sont valides pour $k \geq 0$ seulement et non pour $k < 0$.

On devra prendre des signaux causals.

6. THÉORÈME DE LA VALEUR INITIALE ET DE LA VALEUR FINALE

6.1. Valeur initiale

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

En effet $X(z) = x(0) + \frac{x(1)}{z} + \dots + \frac{x(n)}{z^n} + \dots$ qui tend vers $x(0)$ lorsque z tend vers l'infini.

6.2. Valeur finale

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \cdot X(z) \quad \text{si la limite existe.}$$

Cette limite $x(\infty)$ existe à condition que $X(z)$ ait :

- tous ses pôles à l'intérieur du cercle unité (module < 1)
- ou au plus un pôle réel de module égal à 1, les autres pôles étant de module inférieur à 1.

Puisque $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}$ on a :

$$X(1) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} X(z) \quad (\text{sous réserve de convergence})$$

Formons alors

$$y(n) = x(n+1) - x(n)$$

$$\text{on aura} \quad Y(1) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n) = (x(1) + x(2) + \dots) - (x(0) + x(1) + \dots).$$

$$\text{Soit} \quad \lim_{z \rightarrow 1} Y(z) = x(\infty) - x(0)$$

puisque tous les termes s'éliminent sauf ceux des extrémités.

$$\begin{aligned} \text{Mais} \quad Y(z) &= Z[x(n+1)] - Z[x(n)] \\ &= z[X(z) - x(0)] - X(z) = (z-1)X(z) - zx(0) \end{aligned}$$

On a donc

$$x(\infty) = x(0) + \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z) - zx(0)]$$

$$\text{soit} \quad x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) \quad \text{ou encore} \quad \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \cdot X(z).$$

7. RECHERCHE DE L'ORIGINAL $\mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = x(n) \cdot \Gamma(n)$

Le retour au signal original n'est pas toujours nécessaire. Toutefois des méthodes de recherche de l'original $x(n)$ de $X(z)$ doivent être connues. En voici deux.

7.1. Décomposition de $\frac{X(z)}{z}$ en éléments simples

$$\text{Si} \quad \frac{X(z)}{z} = \sum_i \frac{A_i}{z - a_i} \quad \text{on a}$$

$$X(z) = \sum_i A_i \frac{z}{z - a_i}$$

$$\text{et donc} \quad x(n) = \sum_i A_i \cdot (a_i)^n \quad \text{pour} \quad n \geq 0.$$

On obtient la décomposition standard de $x(n)$ sous forme d'exponentielles, lorsque $X(z)$ n'a que des pôles *simples*.

Nous verrons en exercice le cas de pôles multiples.

? Exemple

$$X(z) = \frac{2z}{(z-1)(z-0,5)} \quad \frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-0,5}$$

Après calculs on aura $x(n) = 4[1^n - (0,5)^n]$ pour $n \geq 0$.

7.2. Liste des premiers échantillons par division des polynômes

Traisons un exemple $X(z) = \frac{z}{z-2}$; on fait la division selon les puissances

0, -1, -2, ... de z

$$\begin{array}{r|l} z & z-2 \\ z-2 & 1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + \dots \\ +2 & X(z) = 1 + 2 \cdot z^{-1} + 4 \cdot z^{-2} + \dots = \sum_i x(i) \cdot z^{-i} \\ \hline 2 - 4z^{-1} & \\ +4 \cdot z^{-1} & \end{array}$$

on a donc les premiers échantillons :

$$x(0) = 1$$

$$x(1) = 2$$

$$x(2) = 4$$

.....

La suite obtenue se présente sous forme de nombres et est théoriquement de longueur infinie.

7.3. Généralisation de la division polynomiale

$$X(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots$$

On peut montrer que

$$c_0 = b_n$$

$$c_1 = b_{n-1} - a_{n-1} \cdot c_0$$

...

$$c_k = b_{n-k} - \sum_{i=1}^{k-1} a_{n-i} \cdot c_{k-i}$$

Cette expression, facilement programmable, se prête bien au calcul sur ordinateur; pour $k > n$, cette relation reste vraie à condition de faire $a_j = 0$ et $b_j = 0$ dès que $j < 0$.

Traisons un ex

Soit à résoudre

Prenons la tra
linéarité et d'avan
Il vient, avec c

d'où $X(z) = \frac{U(z)}{z-1}$
 $u(n)$ est donné,

Exemple 1

$u(n) = an$ pou

Le tableau (*).

donc

et $x(n) = x_1(n) +$

Pour avoir $x_1(n)$

d'où $x_1(n)$

or $x_2(n) = x_0 a^n$.

On obtient $\boxed{p}$

$x(n)$

(*) Le tableau des tr.

8. APPLICATION À LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS RÉCURRENTES

Traisons un exemple.

Soit à résoudre $\begin{cases} x(n+1) - ax(n) = u(n) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ $x(0)$ est la condition initiale.

Prenons la transformée en z de l'équation, en appliquant les théorèmes de linéarité et d'avance.

Il vient, avec des notations évidentes :

$$z[X(z) - x(0)] - aX(z) = U(z)$$

$$\text{d'où } X(z) = \frac{U(z)}{z-a} + \frac{z}{z-a} x(0).$$

$u(n)$ est donné, donc sa transformée $U(z)$ est connue.

Exemple 1

$u(n) = an$ pour $n \geq 0$ (rampe de « pente » a).

Le tableau (*) donne $U(z) = \frac{az}{(z-1)^2}$

$$\text{donc } X(z) = \frac{a \cdot z}{(z-1)^2(z-a)} + \frac{z}{z-a} x_0$$

$$\text{et } x(n) = x_1(n) + x_2(n).$$

Pour avoir $x_1(n)$, décomposons $\frac{X_1(z)}{z} = \frac{a}{(z-1)^2(z-a)}$ en éléments simples

$$\frac{X_1(z)}{z} = \frac{a}{1-a} \cdot \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{-a}{(a-1)^2} \cdot \frac{1}{(z-1)} + \frac{a}{(a-1)^2} \cdot \frac{1}{z-a}$$

$$\text{d'où } x_1(n) = \frac{a}{1-a} \cdot n + \frac{-a}{(a-1)^2} \Gamma(n) + \frac{a}{(a-1)^2} \cdot a^n$$

$$\text{or } x_2(n) = x_0 a^n.$$

On obtient pour $n \geq 0$

$$x(n) = -\frac{a}{(a-1)^2} - \frac{an}{a-1} + \left(x_0 + \frac{a}{(a-1)^2} \right) a^n$$

(*) Le tableau des transformées est à la fin de l'ouvrage.

? Exemple 2

Faire le calcul pour $U(n) = 3$ (pour $n \geq 0$) et $x_0 = 1$.

En observant que $U(n)$ est en fait l'échelon 3. $\Gamma(n)$, il vient après calculs

$$x(n) = \left(\frac{3}{1-a} - \frac{2+a}{1-a} a^n \right) \cdot \Gamma(n)$$

Remarque

La donnée de $x(0) = 0$ entraînerait une forte simplification puisqu'alors

$$X(z) = \frac{1}{z-a} \cdot U(z) \text{ qui est de la forme générale}$$

$X(z) = H(z) \cdot U(z)$ où $H(z)$ ne dépend que de l'équation de définition. Nous reverrons cela avec la fonction de transfert.

9. TRANSFORMATION $\mathcal{L}$ ET TRANSFORMATION $\mathcal{Z}$: RELATIONS

Reprenons l'échantillonnage d'un signal à temps continu, formule (4.1). Nous avons mis en évidence deux types de signaux (fig. 9.5)

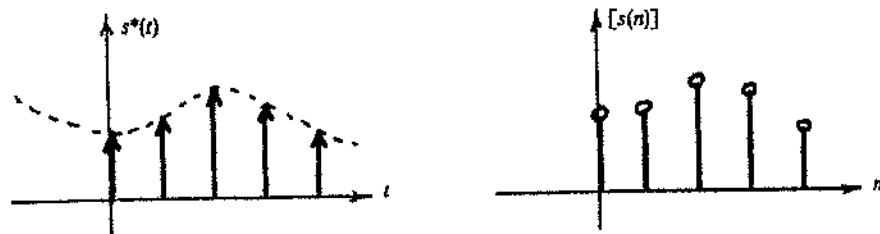


Fig. 9.5.

$$s^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta \cdot s(n\Delta) \cdot \delta(t - n\Delta)$$

signal *analogique* échantillonné idéalisé auquel on peut appliquer la transformation $\mathcal{L}$

$$[s(n)] = [s(n\Delta)]$$

signal *numérisé* (suite de nombres : les échantillons) auquel on peut appliquer la transformation $\mathcal{Z}$.

9. La tran

La transfor
on a donc :

or

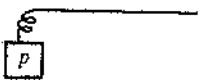
La compara
en z d'une suit
transformée de
de poser :

Posons $p = c$

Ces relations
complexes de p

$$\angle f_b = +\frac{1}{2\Delta}$$

$$- \frac{C_1}{\Delta}$$



$$\angle f_A = -\frac{1}{2\Delta}$$

L'échantillonn

le plan p en banc

Chaque bande

plan z tout entier

L'axe imagina

Dans le plan

Son intérieur

Son extérieur

Nous reverro

$$p = j2\pi f.$$

9. La transformation $\mathcal{Z}$. Transformée en z , des signaux numériques 81

La transformée de Laplace de l'impulsion δ retardée de Δ étant $1 \cdot e^{-p\Delta}$, on a donc :

$$\mathcal{L}[s^*] = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta \cdot s(n\Delta) \cdot e^{-pn\Delta}$$

or

$$\mathcal{Z}[s(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} s(n\Delta) \cdot z^{-n}.$$

La comparaison des deux expressions montre que, à Δ près, la transformée en z d'une suite d'échantillons prélevés sur un signal $s(t)$ n'est autre que la transformée de Laplace de la fonction $s(t)$ échantillonnée idéalisée, à condition de poser :

$$z = e^{p\Delta}$$

Posons $p = \sigma + j2\pi f$ on a :

$$\begin{cases} |z| = e^{\sigma\Delta} \\ \text{Arg } z = 2\pi f\Delta \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma = \text{Re}(p) \\ 2\pi f = \text{Im}(p) \end{cases}$$

Ces relations permettent de décrire les correspondances entre les domaines complexes de p et de z (fig. 9.6).

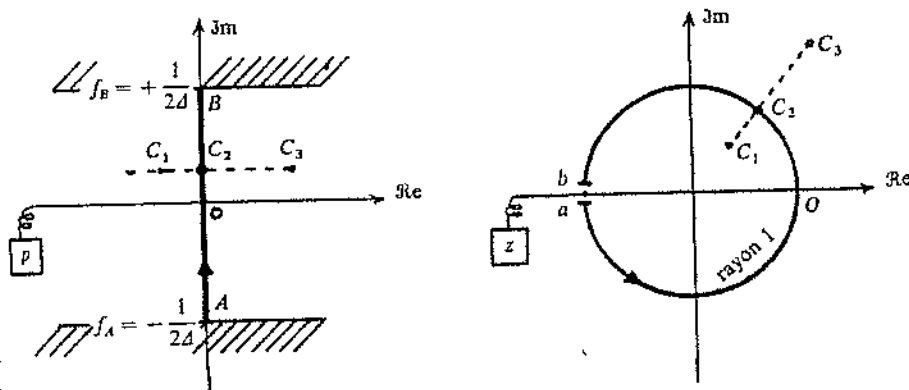


Fig. 9.6.

L'échantillonnage temporel à la fréquence d'échantillonnage $\frac{1}{\Delta}$ « découpe » le plan p en bandes horizontales.

Chaque bande du plan p (nous prendrons la bande centrale) correspond au plan z tout entier.

L'axe imaginaire coupe la bande des p en deux parties, la gauche et la droite.

Dans le plan z , c'est le cercle unitaire qui partage le plan z .

Son intérieur correspond à la gauche du plan p .

Son extérieur correspond à la droite.

Nous reverrons ces propriétés avec la transformation $\mathcal{F}$ dans laquelle $p = j2\pi f$.

10. TRANSFORMÉE EN z MODIFIÉE

Quand un signal $s(t)$ est échantillonné au pas régulier Δ , on connaît $s(k)$, $s(k+1)$, $s(k+2)$... et on définit $S(z)$.

Décalons un peu l'échantillonneur à gauche, on connaîtra $s(k-m)$, $s(k+1-m)$, $s(k+2-m)$... avec $0 < m < 1$, on définira $S(z, m)$.

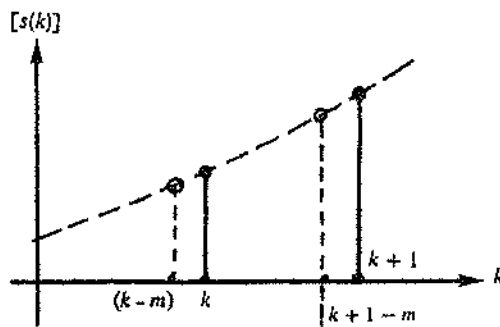


Fig. 9.7.

En balayant m de 1 à 0, l'échantillonnage discret permet de balayer toute la courbe (fig. 9.7).

On définit

$$S(z, m) = z^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} s(k+m) \cdot z^{-k} \quad 0 < m < 1 \quad (9.1)$$

En fait $S(z, m)$ est la transformée en z d'un signal retardé de $(1-m)\Delta$ $0 < m < 1$

En effet, $s(t - (1-m)\Delta)$ échantillonné ($t = k\Delta$) vaut $s[(k+m-1)\Delta]$ dont la transformée en z est bien donnée par la formule 9.1.

Ainsi

$$m = 0, \text{ retard d'un pas } S(z, 0) = z^{-1} \cdot S(z)$$

$$m = 1, \text{ retard nul } S(z, 1) = S(z) - s(0)$$

$s(0)$ doit être retranché, car dans la formule (9.1) le premier terme est $s(1)$ et non $s(0)$.

? Exemples

N° 1. Transformée en z modifiée de $[a^k]$.

$$\text{D'après (9.1), } S(z, m) = z^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} a^{(i+m)} \cdot z^{-i} = z^{-1} \cdot a^m \cdot \frac{z}{z-a}$$

$$S(z, m) = \frac{a^m}{z-a}$$

N° 2. Transformée en z d'un signal retardé de τ avec $\tau < \Delta$.

Soit $S(p) = \frac{1}{p(1 + Tp)} e^{-p\tau}$ la transformée de Laplace d'un signal continu retardé de τ .

Le signal causal non retardé est $s(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$.

Posons $\tau = (1 - m)\Delta$ $0 < m < 1$.

La transformée en z modifiée du signal échantillonné est

$$S(z, m) = z^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} s(k + m) \cdot z^{-k} \quad \text{or} \quad s(k + m) = 1 - e^{-\frac{(k+m)\Delta}{T}}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad S(z, m) &= z^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} - e^{-\frac{m\Delta}{T}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{k\Delta}{T}} \cdot z^{-k} \right) \\ &= z^{-1} \cdot \left(\frac{z}{z-1} - e^{-\frac{m\Delta}{T}} \cdot \frac{z}{z - e^{-\Delta/T}} \right) = \frac{1}{z-1} - \frac{e^{-\frac{m\Delta}{T}}}{z - e^{-\Delta/T}} \end{aligned}$$

car on reconnaît sous les sommations, la transformée de l'échelon et celle de l'exponentielle.

(9.1)

$$\frac{z}{z-a}$$

CHAPITRE 10

LA TRANSFORMATION $\mathcal{F}$ TRANSFORMATION DE FOURIER DU SIGNAL APÉRIODIQUE

Joseph Fourier, né à Auxerre (1768-1830) fut contemporain de Laplace. La transformation fonctionnelle de Fourier, développée à l'origine pour étudier la propagation de la chaleur, a subi de nombreux apports.

Cette théorie constitue un outil puissant, présent aussi bien en théorie du signal que dans les domaines de la biologie et de l'économie.

La transformation de Fourier peut être décrite comme l'ont été les transformations $\mathcal{C}$, $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{Z}$; nous verrons d'ailleurs que $\mathcal{F}$ constitue une restriction de la transformation (bilatérale) $\mathcal{L}$.

Néanmoins une approche plus intuitive est possible, à partir des signaux périodiques.

Sous certaines conditions (les conditions de Dirichlet), un signal périodique de période $T_0 = \frac{1}{F_0}$ peut être constitué par une somme infinie de sinusoïdes de fréquences $F_0, 2F_0, \dots, nF_0, \dots$ multiples de la fréquence fondamentale F_0 .

Ces sinusoïdes doivent avoir une amplitude et un déphasage à l'origine bien déterminés (et calculables).

Ainsi, un synthétiseur de musique peut rendre le timbre d'instruments divers, par dosage adéquat des différents « harmoniques » d'un son fondamental dont la fréquence F_0 détermine la hauteur dans la gamme.

Il est plus commode, au plan mathématique, de représenter les sinusoïdes déphasées par des exponentielles imaginaires, sous réserve que les coefficients d'amplitude soient complexes afin que la somme soit, elle, convenablement réelle.

On aura ainsi

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C(n) \cdot e^{jn2\pi F_0 t}$$

où $x_p(t)$ est périodique (période = $\frac{1}{F_0}$).

La sommation s'étend sur $]-\infty, +\infty[$ afin que l'association de deux exponentielles d'arguments opposés rende bien les sinusoïdes envisagées, en vertu du fait que $2 \cos x = e^{jx} + e^{-jx}$.

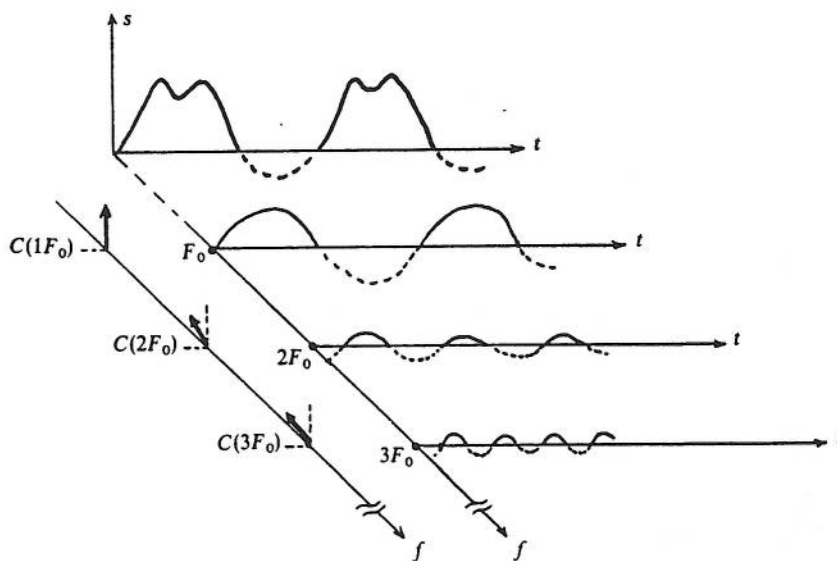


Fig. 10.1

Intuitivement, on devine que $s(t)$ est une somme de sinusoïdes (fig. 10.1)

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A(n) \cos(2\pi n F_0 t) + \sum_{n=0}^{\infty} B(n) \sin(2\pi n F_0 t) \quad (10.1)$$

qu'on peut écrire puisque

$$s(t) = A(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{j2\pi n F_0 t}}{2} \cdot \left(A(n) + \frac{B(n)}{j} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-j2\pi n F_0 t}}{2} \cdot \left(A(n) - \frac{B(n)}{j} \right) \quad (10.2)$$

On remarque qu'un changement de n en $-n$ dans (10.1) ne change pas $s(t)$ à condition que $A(n)$ soit paire et $B(n)$ impaire.

Donc, si on prend $A(n) = A(-n)$ et $B(n) = -B(-n)$

$s(t)$ s'écrit, en changeant n en $(-n)$ dans la deuxième somme de (10.2)

$$\begin{aligned} s(t) &= A(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} e^{j2\pi n F_0 t} \left(A(n) + \frac{B(n)}{j} \right) + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{2} e^{j2\pi n F_0 t} \left(A(n) + \frac{B(n)}{j} \right) \\ &= A(0) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n F_0 t} C(n) - 2 \cdot C(0) \end{aligned}$$

$$\text{avec } C(n) = \frac{A(n) - jB(n)}{2}.$$

Mais $C(0) = \frac{A(0)}{2}$ puisque $B(0) = 0$ ($B(0)$ est impair), on a finalement :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C(n) \cdot e^{j2\pi n F_0 t} \quad \text{avec} \quad C(n) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) e^{-j2\pi n F_0 t} dt \quad (10.3)$$

$C(n)$ est un coefficient complexe, nommé amplitude complexe du n -ième harmonique.

$e^{jn\pi F_0 t}$ est nommé aussi le n -ième harmonique.

On remarque, n étant positif ou négatif, l'introduction d'un « spectre » de fréquences $]-\infty, +\infty[$ tout comme le temps qui s'écoule de $-\infty$ à $+\infty$.

1. LE COUPLE DE FOURIER

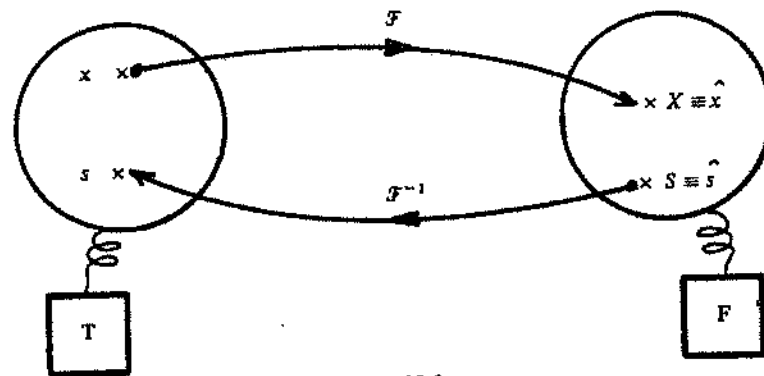


Fig. 10.2.

T est l'ensemble des fonctions (à valeurs réelles, ou plus rarement complexes) de la variable réelle t qui satisfont aux conditions de Dirichlet (*) (nous verrons des exceptions cependant) garantissant des fonctions assez « douces ».

F est l'ensemble des fonctions complexes de la variable réelle f .

Traditionnellement en physique t représente le temps et f la fréquence.

$\mathcal{F}$ est l'opérateur fonctionnel $x_{t \in \mathbb{R}} \xrightarrow{\mathcal{F}} X_{f \in \mathbb{R}}$

défini par :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \mathcal{F}[x] = \hat{x} \quad (10.4)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{+j2\pi ft} df = \mathcal{F}^{-1}[X] \quad (10.5)$$

(*) 1. $x(t)$ est « sommable » soit $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt$ existe.

2. $x(t)$ a un nombre fini de discontinuités sur un intervalle de temps fini.

3. $x(t)$ a un nombre fini de maxima-minima sur un intervalle de temps fini.

10. La transfo

X et x sont

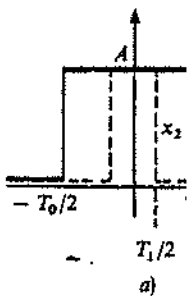
Si (10.4) est

(10.5) doi

Nous ne fer
doit être rapp
sa base d'expor

Il convient
complexe même
bien la partie r
 $X(f)$ est une

LA T



$X_1(f)$ est réelle

Plus l'impuls

Ceci correspon

hautes fréquences

brefs (orages, ét

spectre de fréque

bande passante

On a aussi (

10. La transformation $\mathcal{F}$ Transformation de Fourier du signal aperiodique 87

X et x sont dites : « couple de Fourier ».

Si (10.4) est une définition (comparable à la transformée de Laplace),

(10.5) doit être démontrée.

Nous ne ferons pas cette démonstration ; remarquons simplement que (10.5) doit être rapprochée de la décomposition d'une fonction périodique $x_p(t)$ sur sa base d'exponentielles :

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C(n) \cdot e^{+j2\pi n F_0 t}$$

Il convient d'observer que $X(f)$, tout comme $C(n)$, est le plus souvent complexe même si $x(t)$ est réelle, il faudra donc donner $|X(f)|$ et $\text{Arg } X(f)$ (ou bien la partie réelle, et la partie imaginaire).

$X(f)$ est une fonction continue de f , par contre $C(n)$ est une fonction discrète.

2. UN EXEMPLE. LA TRANSFORMÉE DU CRÉNEAU CENTRÉ

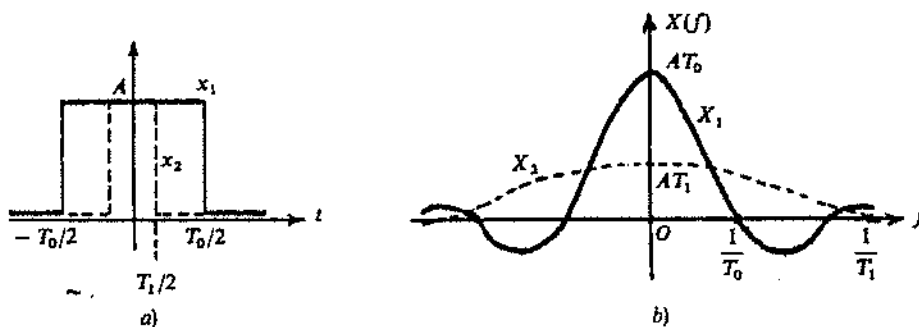


Fig. 10.3.

$$\begin{aligned} X_1(f) &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \frac{A}{-j2\pi f} \cdot [e^{-j2\pi f t}]_{-T_0/2}^{T_0/2} \\ &= AT_0 \cdot \frac{\sin(u)}{u} \quad \text{avec } u = \pi T_0 \cdot f \end{aligned}$$

(10.4)

$X_1(f)$ est réelle (dans ce cas) et peut être représentée.

Plus l'impulsion est « étroite », plus sa transformée est « large ».

(10.5)

Ceci correspond à l'idée commune, qu'un signal très abrupt « contient » des hautes fréquences. Cela explique en tout cas que les parasites électromagnétiques brefs (orages, étincelles électriques) sont entendus dans les postes de radio. Leur spectre de fréquence est, en effet, suffisamment large pour être compris dans la bande passante du filtre d'entrée du poste-radio.

On a aussi (largeur du créneau) $\times$ (largeur utile du spectre) $\simeq 1$

$$\Delta T \cdot \Delta f \simeq 1$$

? Exercice

Calculer, par application de la définition, les transformées des fonctions x_3 et x_4 .

On observe que, les conditions de sommabilité (Dirichlet) étant satisfaites, on n'a pas de problème d'intégration.

On observe aussi que X_3 et X_4 ne sont plus réelles.

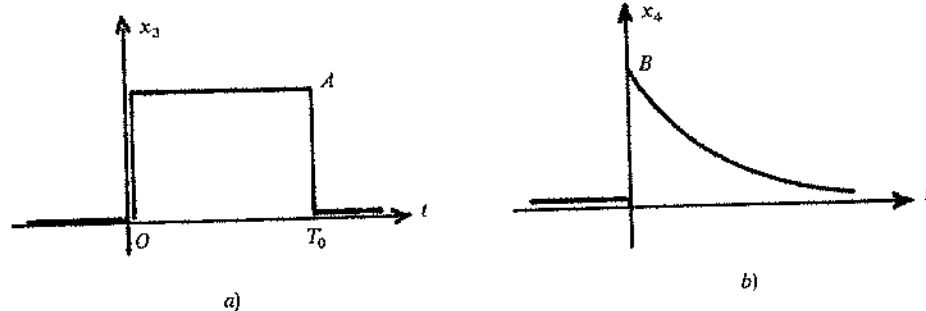


Fig. 10.4.

$$x_3 = \begin{cases} A & \text{pour } 0 < t < T_0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad x_4 = \begin{cases} B e^{-at} & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\text{On trouvera } X_3 = X_1 \cdot e^{-j\pi f T_0} \text{ et } X_4 = \frac{1}{j2\pi f + a}.$$

3. PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMATION $\mathcal{F}$

Pour ne pas trop morceler ce cours certaines propriétés seront démontrées en annexe.

3.1. Linéarité

Il résulte immédiatement de la définition intégrale que

$$\mathcal{F}[ax_1 + bx_2] = a\mathcal{F}[x_1] + b\mathcal{F}[x_2]$$

dès lors que a et b sont des constantes.

3.2. Propriété fondamentale de $S(f)$

$s(t)$ est réelle a comme conséquence :

$$\Re[S(f)] \text{ est paire et } \Im[S(f)] \text{ est impaire}$$

10. La transformation $\mathcal{F}$. Transformation de Fourier du signal apériodique 89

soit aussi $|S(f)|$ est pair et $\text{Arg}[S(f)]$ est impair.

En effet, l'exponentielle $e^{-j2\pi ft}$ sous l'intégrale s'écrit

$$\cos(2\pi ft) - j \sin(2\pi ft),$$

de partie réelle paire et de partie imaginaire impaire.

On peut aussi résumer cela en écrivant :

$$S(-f) = S^*(f) \quad S^* = \text{conjugué de } S.$$

3.3. Parité-imparité de $s(t)$ (fonction réelle)

Si $s(t)$ est paire $S(f)$ est réelle (et paire)

si $s(t)$ est impaire $S(f)$ est imaginaire pure (et impaire).

En effet

$$\mathcal{F}[s(-t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(-t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(u) e^{+j2\pi fu} du$$

donc $\mathcal{F}[s(-t)] = S^*(f)$, ceci assurant les propriétés précédentes.

3.4. Dualité

Les relations suivantes expriment cette propriété.

Si	$x(t)$	$\xrightarrow{\mathcal{F}}$	$X(f)$
alors	$X(t)$	$\xrightarrow{\mathcal{F}}$	$x(-f)$
et	$X(-t)$	$\xrightarrow{\mathcal{F}}$	$x(+f)$

En effet on a :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{+j2\pi ft} df$$

changeons le nom des variables en posant $t = f$ et $f = t$

$$x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{+j2\pi ft} dt$$

$$\text{d'où } x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-j2\pi ft} dt = \mathcal{F}[X(t)].$$

Si $x(t)$ est réelle (et paire) $X(f)$ est paire (et réelle); la dualité a ainsi une représentation physique. Par exemple :

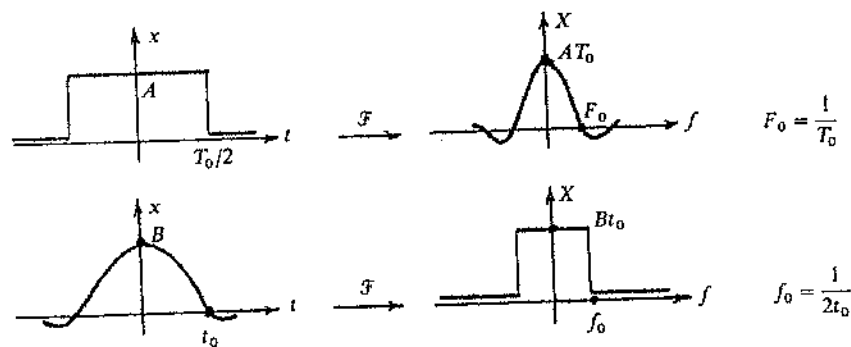


Fig. 10.5.

Cette figure montre, que pour réaliser un filtre passe-bas idéal, de fréquence de coupure f_0 , dont le « spectre » soit un créneau, il faudrait construire un filtre de réponse impulsionnelle en $\frac{\sin u}{u}$.

Cette réponse $h(u)$ n'étant pas causale, le filtre n'est pas réalisable.

On remarque qu'un retard temporel, le rendra presque causal, donc réalisable, mais au prix d'une erreur due à l'annulation (causalité) autoritaire d'harmoniques. De plus le retard va modifier la phase comme nous allons le voir immédiatement.

3.5. Décalage temporel. Décalage fréquentiel

Si $s(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} S(f)$
alors

$$s(t - t_0) \rightarrow e^{-j2\pi f t_0} \cdot S(f) \quad (10,6)$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \cdot s(t) \rightarrow S(f - f_0) \quad (10,7)$$

? Démontrer (10.6) en posant $u = (t - t_0)$ dans la définition intégrale de $S(f)$ et (10.7) en regroupant les exponentielles.

Interprétation de ces deux résultats.

(1) Lorsqu'un signal $s(t)$ est retardé, ses composantes fréquentielles le sont aussi, sans modification d'amplitude.

Ainsi $|S(f)|$ reste inchangé, mais $\text{Arg}[S(f)]$ est « augmenté » de $(-j2\pi t_0 f)$, proportionnel à f .

(2) On a bien évidemment :

$$\mathcal{F}[e^{-j2\pi f_0 t} s(t)] = S(f + f_0)$$

$$\text{Donc } \mathcal{F}[s(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)] = \frac{1}{2} [S(f - f_0) + S(f + f_0)]$$

Ainsi, si
porteuse (f_0)
composé de
autour de f_0

4.1. Résult

4.2. Démon

D'après la

En consid
l'ordre des in

Posons t
L'exponen

Les deux

? Nous laissons
quelques jalo
Soit p , la

En rempl
manipulation

10. La transformation $\mathcal{F}$. Transformation de Fourier du signal apériodique 91

Ainsi, si $S(f)$ est le spectre d'un signal $s(t)$, le spectre de fréquence d'une porteuse (f_0) d'amplitude $s(t)$ (modulation d'amplitude sans porteuse) sera composé de deux spectres, formés à partir de $S(f)$, décalés à droite et à gauche autour de f_0 , la fréquence porteuse.

$$F_0 = \frac{1}{T_0}$$

$$f_0 = \frac{1}{2t_0}$$

4. TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UN PRODUIT DE CONVOLUTION

4.1. Résultats

$$\mathcal{F}(x * y) = X \cdot Y$$

$$\mathcal{F}(x \cdot y) = X * Y$$

4.2. Démonstration

D'après la définition du produit de convolution (chap. 6, § 1) on a :

$$\mathcal{F}(x * y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \cdot y(t-u) du \right) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

En considérant cette intégrale comme une intégrale double et en permutant l'ordre des intégrations il vient :

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-u) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \right) \cdot du$$

Posons $t-u=v$ donc $t=u+v$.

L'exponentielle se décompose et donne

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \cdot e^{-j2\pi fu} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi fv} \cdot y(v) \cdot dv \right) du$$

Les deux intégrales donnent les transformées de x et de y

$$= X(f) \cdot Y(f)$$

? Nous laissons au lecteur le soin de démontrer la deuxième relation; indiquons quelques jalons.

Soit p , la fonction (temporelle) dont $X * Y$ est la transformée

$$p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (X * Y) \cdot e^{+j2\pi ft} df$$

En remplaçant $X * Y$ par son expression intégrale et au prix de manipulations analogues à celles vues en 4.2 on arrive à $p(t) = x(t) \cdot y(t)$.

5. TRANSFORMÉE DU PRODUIT DE CORRÉLATION

Soit $x \widehat{*} y$ le produit de *corrélation* défini par :

$$(x \widehat{*} y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \cdot y(t+u) du \quad (\text{attention, non commutatif})$$

On pose $t+u=v$, il vient

$$(x \widehat{*} y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(v-t) \cdot y(v) dv = x(-t) * y(t)$$

La notation impropre, mais commode, montre qu'on se ramène à un produit de convolution.

Mais $\mathcal{F}[x(-t)] = X^*(f)$ d'après (chap. 10, § 3), donc

$$\mathcal{F}[x \widehat{*} y] = X^*(f) \cdot Y(f)$$

et

$$\mathcal{F}[y \widehat{*} x] = X(f) \cdot Y^*(f)$$

6. L'ÉNERGIE DU SIGNAL. THÉORÈME DE PARSEVAL

6.1. Définition de l'énergie d'un signal

Par analogie avec le signal électrique dont la puissance est $Ri^2(t) = \frac{1}{R} v^2(t)$, celle d'un signal d'amplitude $s(t)$ sera $K \cdot s^2(t)$, K dépendant du récepteur d'énergie lié à la nature physique du signal s .

L'énergie sur toute la durée du signal est donc

$$K \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt$$

Nous allons chercher une forme fréquentielle de ce résultat.

6.2. Identité de Parseval-Plancherel

$$\text{Énoncé} \quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot Y^*(f) df}$$

Démonstration dans le cas où y est réel, $y = y^*$.

On a, à l'évidence

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt \quad \text{pour } f = 0 \\ &= (X * Y)(f) \quad \text{pour } f = 0 \end{aligned}$$

10. La transformation $\mathcal{F}$. Transformation de Fourier du signal aperiodique 93

Et en explicitant le produit de convolution pour $f=0$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) \cdot Y(0-u) du$$

Or $Y(-x) = Y^*(x)$ (changement de x en $-x$ revient à changer j en $-j$)
d'où le résultat.

Cas particulier important : $y(t) = x(t)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

L'énergie d'un signal peut être obtenue par sommation, indifféremment dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel.

Ainsi, la bande passante d'un appareil qui mesure un bruit dont le spectre est très étendu, limite l'énergie de ce bruit à sa seule bande passante.

? Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$

Il faut remarquer que ceci a quelque chose à voir avec la transformée de Fourier du créneau.

ATION

mutatif)

à un produit

ARSEVAL

$P(t) = \frac{1}{R} v^2(t),$
du récepteur

$f=0$

$f=0$

CHAPITRE 11

TRANSFORMÉE DE FOURIER DE QUELQUES DISTRIBUTIONS

La coexistence de signaux périodiques et non périodiques dans les systèmes, par exemple l'excitation sinusoïdale et la réponse impulsionnelle apériodique qui interagissent par convolution, impose un traitement unifié de tous les signaux.

Certains signaux n'admettent pas de transformée $\mathcal{F}$, au sens des fonctions, c'est le cas des signaux périodiques et de signaux aussi familiers que l'échelon, ou tous ceux à croissance lente, l'intégrale de définition n'ayant pas de convergence.

C'est pourquoi nous nous tournons vers la transformée de ces signaux décrits en tant que distributions (chap. 2, § 7).

La transformée de Fourier notée $[\hat{f}]$ d'une distribution $[f]$ est définie par

$$\langle [\hat{f}], \psi \rangle = \langle [f], \hat{\psi} \rangle \quad (\text{voir chap 2, § 7}) \quad (11.1)$$

où ψ est une fonction à décroissance rapide à l'infini ($\psi \in \mathcal{S}$).

1. TRANSFORMÉE DE LA DISTRIBUTION DE DIRAC

Nous avons démontré (chap. 2, § 7) que $\delta(t)$ admet comme transformée la constante 1.

D'ailleurs l'écriture intégrale de la transformée de Fourier « conduit » à ce résultat.

$$\mathcal{F}[\delta] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = 1$$

puisque l'effet de $\delta(t)$ sur toute fonction est de prélever l'échantillon de cette fonction en $t = 0$; la fonction exponentielle vaut 1 en $t = 0$.

Lorsque le créneau (chap. 10, § 2) temporel devient de plus en plus étroit, sa transformée s'élargit au point de devenir une constante.

Un signal bref occupe une bande de fréquences large.

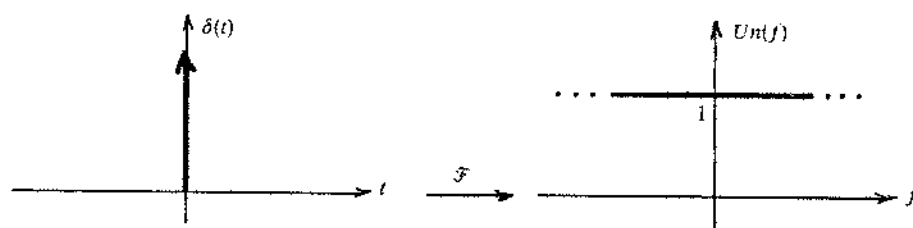


Fig. 11.1.

2. TRANSFORMÉE D'UNE CONSTANTE 1

Posons $un(t) = 1 \quad \forall t$

D'après le théorème de dualité

$$\mathcal{F}[un(t)] = \delta(-f)$$

et comme $\delta(f)$ est « paire »

$$\mathcal{F}[un(t)] = \delta(f)$$

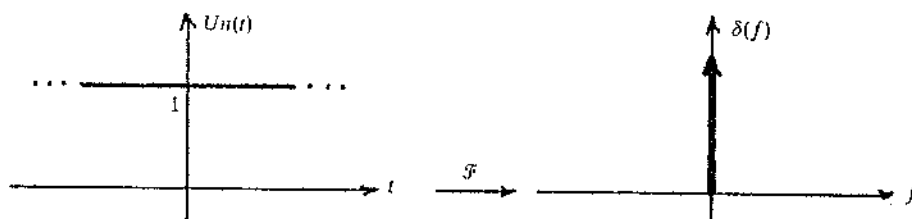


Fig. 11.2.

Les relations ne sont vraies qu'au sens des distributions.

La représentation graphique — incorrecte — est néanmoins intéressante. Du point de vue du physicien $Un(t)$ est une sinusoïde de fréquence zéro, son spectre de Fourier ne contient qu'une seule raie à la fréquence zéro, le Dirac.

Ainsi, au sens des distributions, on donne un sens à l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j2\pi ft} dt, \text{ elle vaut } \delta(f).$$

3. TRANSFORMÉE D'UN PEIGNE DE DIRAC $\square$

3.1. Théorème

Toute fonction périodique $x(t)$ a une transformée nulle presque partout. En effet, si la période de répétition de $x(t)$ est T on a :

$$x(t - T) = x(t)$$

D'après le théorème du retard

$$X(f) = e^{-j2\pi fT} \cdot X(f)$$

Ceci entraîne $X(f) = 0$ sauf si $e^{-j2\pi fT} = 1$ ce qui a lieu pour $2\pi fT = 2k\pi$ et

donc $X(f) = 0$ sauf pour $f = 0, f = \frac{1}{T}, \frac{2}{T} \dots$

La transformée d'une fonction périodique ressemble aux dents d'un peigne, on parle d'un « spectre ».

3.2. Transformée du peigne temporel $\sqcap$

Le peigne temporel est une « fonction » périodique, sa transformée de Fourier est un peigne.

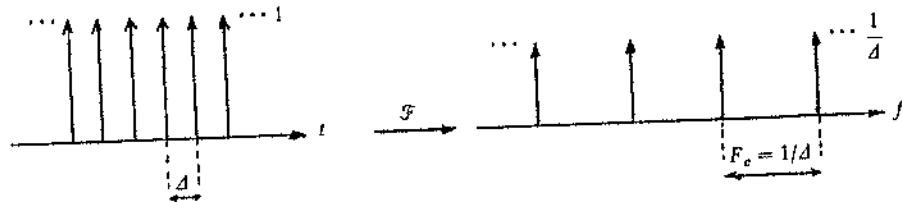


Fig. 11.3.

Nous démontrons en annexe que le peigne temporel $\sqcap(t)$ de mesure 1 et de pas Δ a pour transformée de Fourier le peigne fréquentiel $\frac{1}{\Delta} \sqcap(f)$ de mesure $\frac{1}{\Delta}$ et de pas $F_e = \frac{1}{\Delta}$.

4. TRANSFORMÉE D'UNE SINUSOÏDE

Cette transformation ne peut s'envisager que dans le cadre des distributions. On va donc transformer la distribution associée à la fonction sinusoïdale. Nous conservons, car il est plus léger, le formalisme d'écriture des fonctions.

Soit
$$s(t) = \cos \omega_0 t = \cos (2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})$$

Cherchons la transformée de Fourier de la fonction exponentielle.

$$\mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j2\pi (f - f_0)t} dt$$

Nous avons donné un sens à cette intégrale (chap 11, § 2), elle vaut :

$$\delta(f - f_0)$$

L'autre exponentielle aura $\delta(f + f_0)$ comme transformée.
Nous obtenons ainsi :

$$\mathcal{F}[\cos 2\pi f_0 t] = \frac{1}{2} (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))$$

On obtiendrait de même très facilement

$$\mathcal{F}[\sin 2\pi f_0 t] = \frac{1}{2j} (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$$

On observe les propriétés suivantes :

La sinusoïde (ou ses versions déphasées) ne « contenant » qu'une seule fréquence f_0 , son spectre discret ne contient que deux raies distribuées sur f_0 et son image $-f_0$.

Le cosinus (pair) a une transformée réelle, le sinus (impair) a une transformée imaginaire pure.

5. TRANSFORMÉE DE LA DÉRIVÉE

Nous supposons ici la dérivée prise au sens des distributions, ou plus exactement nous allons donner la transformée de la *dérivée d'une distribution*.

Soit s un signal considéré comme une distribution
 $\dot{s}$ est sa dérivée.

D'après la définition de la transformée de Fourier (11.1) nous avons

$$\langle \widehat{\dot{s}}, \psi \rangle = \langle \dot{s}, \widehat{\psi} \rangle$$

La dérivée d'une distribution (chap, 2, § 6) vérifie :

$$\langle \dot{s}, \widehat{\psi} \rangle = - \langle s, (\widehat{\psi})' \rangle$$

or

$$\widehat{\psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \widehat{\psi}(f)$$

$(\widehat{\psi})'$ est la dérivée sous le signe somme par rapport à f , donc

$$(\widehat{\psi})' = -j2\pi f \widehat{\psi}(f)$$

d'où

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\dot{s}}, \psi \rangle &= - \langle s, -j2\pi f \cdot \widehat{\psi} \rangle = +j2\pi f \langle s, \widehat{\psi} \rangle \\ &= j2\pi f \langle \widehat{s}, \psi \rangle = \langle j2\pi f \widehat{s}, \psi \rangle \end{aligned}$$

D'où on tire :

$$\boxed{\widehat{\dot{s}} = j2\pi f \cdot \widehat{s}}$$

On vient d'établir que la transformée de Fourier de la dérivée est la transformée de Fourier de la « fonction » multipliée par $j2\pi f$.

Ceci est à comparer avec la transformée de Laplace de la dérivée.

Attention

Cette égalité est une égalité entre distributions; d'après chap. 2, § 5 on doit écrire :

$$\widehat{s} = \frac{1}{j2\pi f} \cdot \widehat{s} + k \cdot \delta(f) \quad \text{où } k \text{ doit être déterminé.}$$

Il est capital d'observer que k n'est pas toujours nul, il caractérise la présence d'une constante dans la « fonction » s .

Exemples

La figure 11.4 montre les dérivées. La formule générale appliquée aux trois cas successifs donne :

$$\widehat{s}_1 = \frac{1}{j2\pi f} \cdot 0 + k_1 \delta(f)$$

$$\widehat{s}_2 = \frac{1}{j2\pi f} \cdot 1 + k_2 \delta(f)$$

$$\widehat{s}_3 = \frac{1}{j2\pi f} \cdot 1 + k_3 \delta(f)$$

Nous avons vu au chap. 11 § 2 que $\widehat{s}_1 = \delta(f)$ donc $k_1 = 1$

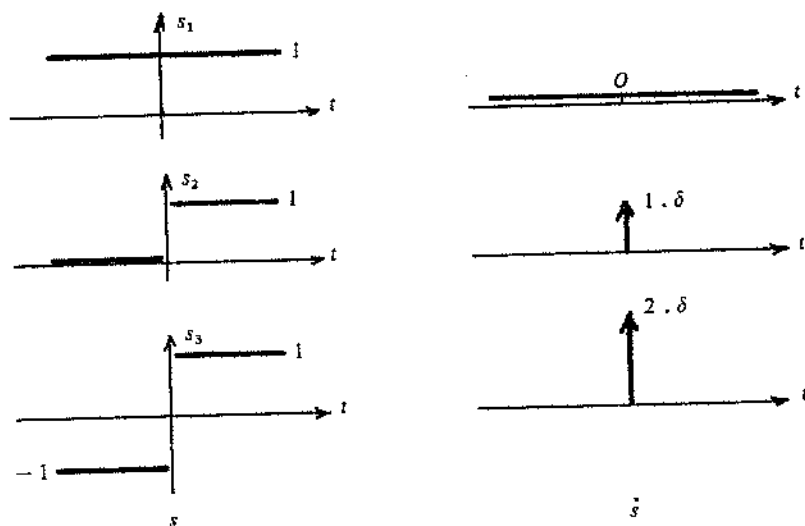


Fig. 11.4.

Nous démontrerons (voir Appendice à la fin du chap. 15) que

$$\widehat{s}_2 = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f).$$

On en déduit donc $\widehat{s}_3$. En effet :

$$s_3 = 2s_2 - 1 \quad \text{donc} \quad \widehat{s}_3 = 2\widehat{s}_2 - \delta(f)$$

$$\text{Ainsi } \widehat{s}_3 = \frac{1}{j\pi f} + \delta(f) - \delta(f) \quad \text{donc} \quad \widehat{s}_3 = \frac{1}{j\pi f}$$

Par contre $k=0$ si $s(t)$ n'a pas de «composante continue».

Nous retiendrons que si s a une valeur moyenne nulle, ou tend vers zéro à l'infini

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[s^*] &= j2\pi f \cdot \mathcal{F}[s] \\ \mathcal{F}[s] &= \frac{1}{j2\pi f} \cdot \mathcal{F}[s^*] \end{aligned} \quad (11.2)$$

Les applications sont extrêmement intéressantes :

? Calcul de la transformée $S(f)$ du créneau $s(t)$

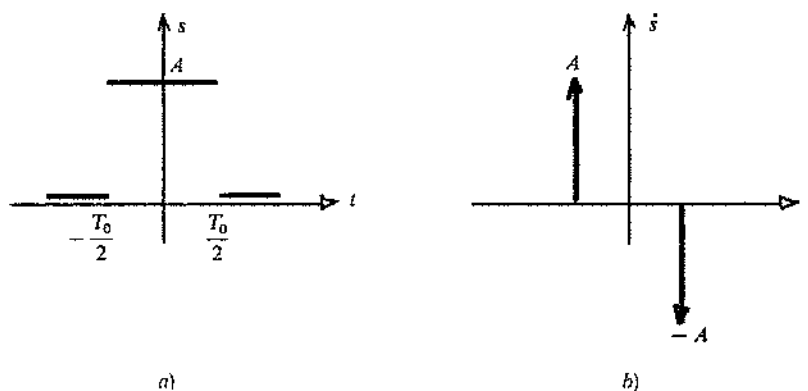


Fig. 11.5.

s satisfait la condition de nullité à l'infini

$\dot{s}$ est formée de deux Diracs (la dérivée a lieu au sens des distributions).

Ces deux impulsions sont, l'une avancée, l'autre retardée.

$$\mathcal{F}[s^*] = A \cdot \mathcal{F}\left[\delta\left(t + \frac{T_0}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{T_0}{2}\right)\right].$$

D'après le théorème du retard appliqué au Dirac $\delta(t)$ dont la transformée est 1 il vient

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[s^*] &= A \cdot [e^{+j2\pi f \frac{T_0}{2}} - e^{-j2\pi f \frac{T_0}{2}}] \\ &= 2jA \sin(\pi f T_0)\end{aligned}$$

Mais d'après le théorème précédent, (11.2)

$$\mathcal{F}[s] = S(f) = \frac{\mathcal{F}[s^*]}{j2\pi f} = \frac{A}{\pi f} \sin(\pi f T_0) = AT_0 \frac{\sin(\pi f T_0)}{\pi f T_0} = AT_0 \operatorname{sinc}(f T_0)$$

Cette formule a déjà été obtenue (chap. 10, § 2) par voie directe.

? Dérivez deux fois la fonction triangle pour obtenir $\dot{s}$ qui sera formée d'impulsions de Dirac dont la transformée de Fourier est facile à calculer.

On trouvera : $\mathcal{F}[s] = S(f) = \frac{BT_0}{2} \cdot \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$
avec $x = \frac{\pi f T_0}{2}$.

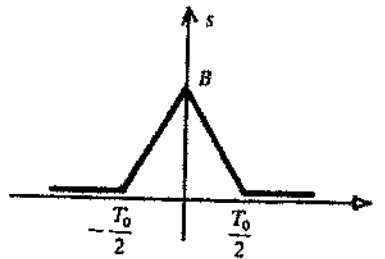


Fig. 11.6.

Prendre $A = \frac{1}{T_0}$, puis $B = \frac{2}{T_0}$ et examiner l'évolution de s (créneau et triangle) et de $\mathcal{F}[s]$ lorsque T_0 tend vers zéro.

TR
DI

1. DU

D'après (peigne $\square(t)$)

E

Comme

en employant la $\widehat{s}_M = S_M$ d'après

$\text{sinc}(f T_0)$

recte.

qui sera formée
à calculer.

CHAPITRE 12

TRANSFORMÉE DE FOURIER DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

1. DUPLICATION D'UN MOTIF. PÉRIODISATION

D'après (chap. 6, § 2) la périodisation est obtenue par convolution avec un peigne $\text{III}(t)$ de période T_0 et de « dents » unitaires (fig. 12.0)

$$s_p = s_M * \text{III}$$

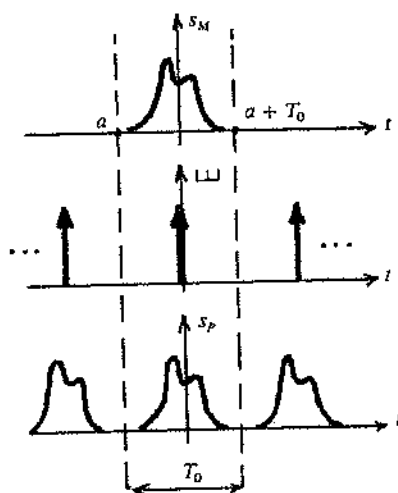


Fig. 12.0.

2. TRANSFORMÉE D'UNE FONCTION PÉRIODIQUE $s_p(t)$

Comme

$$s_p = s_M * \text{III}$$

$$\widehat{s_p} = \widehat{s_M} \cdot \widehat{\text{III}}$$

en employant la notation vue à propos des distributions $\widehat{s} = \mathcal{F}[s]$ ou $\widehat{s_M} = S_M$ d'après la notation du chapitre 10

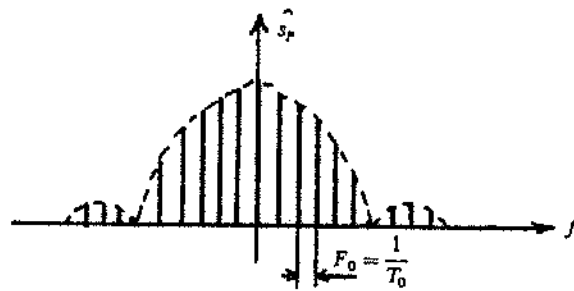


Fig. 12.1.

et $\mathcal{T}[\square\square](t) = \hat{\square\square}(f) = \frac{1}{T_0} \square\square(f)$ d'après (chap. 11, § 3)

d'où

$$\mathcal{T}[s_P(t)] = \hat{s}_P(f) = \frac{1}{T_0} \cdot S_M(f) \cdot \square\square(f), \quad (12.1)$$

$\hat{s}_P$ est représentée à la figure 12.1 comme un peigne modulé par la transformée du motif.

2.1. Amplitude (complexe) du n -ième harmonique

La n -ième dent du peigne modulé a comme amplitude $\frac{1}{T_0} \cdot S_M(nF_0)$, soit d'après (10.4) $\frac{1}{T_0} \int_a^{a+T_0} s_M(t) \cdot e^{-j2\pi n F_0 t} dt$ puisque $s_M(t)$ est nul en dehors de l'intervalle T_0 .

2.2. Expression classique de $s_P(t)$. Série de Fourier

En explicitant le peigne $\square\square(f)$, (12.1) s'écrit

$$\hat{s}_P(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_M(nF_0) \cdot \delta(f - nF_0) \quad (12.2)$$

La transformée inverse donne

$$s_P(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}_P(f) \cdot e^{+j2\pi f t} df$$

Reportons (12.2) dans cette intégrale et permutons l'ordre de la sommation discrète avec l'intégration. Il vient

$$s_P(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(S_M(nF_0) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - nF_0) \cdot e^{+j2\pi f t} df \right) \quad (12.3)$$

l'intégrale renvoie la valeur de l'exponentielle pour $f = nF_0$ et donc

$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} \cdot S_M(nF_0) \cdot e^{+j2\pi nF_0 t} \quad (12.4)$$

Ceci confirme ce que nous avons évoqué dans l'introduction au chapitre 10 (formule 10.3), et fournit un moyen de calcul des $C(n)$.

$s_p(t)$ est développable en une somme d'une infinité de termes exponentiels (les sinusoides) de « fréquence » nF_0 multiples d'une fréquence fondamentale $F_0 = \frac{1}{T_0}$ qui est celle de $s_p(t)$.

Les amplitudes complexes $C(n)$ de ces termes sont précisément les mesures des dents du peigne de la transformée de Fourier de $s_p(t)$.

Exemple

1) Isolons le motif $s_M(t)$.

C'est le créneau de durée d .

2) La transformée de Fourier du motif est

$$S_M(f) = Ad \cdot \frac{\sin(\pi df)}{\pi df}$$

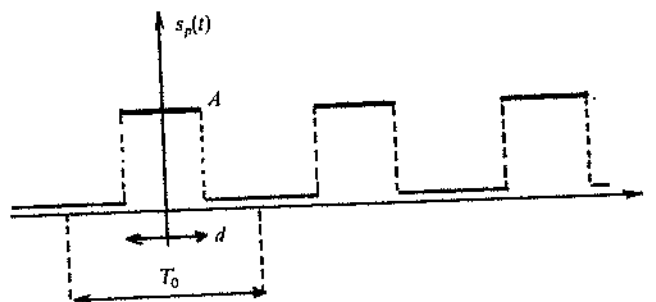


Fig. 12.2.

3) Donc les composantes $C(n)$ du spectre de Fourier de la fonction périodique $s_p(t)$ de période T_0 sont

$$C(n) = \frac{1}{T_0} \cdot S_M(nF_0) = \frac{1}{T_0} \cdot Ad \cdot \frac{\sin(\pi dnF_0)}{\pi dnF_0} = \frac{A}{\pi n} \cdot \sin\left(\pi n \frac{d}{T_0}\right)$$

$C(0) = \frac{Ad}{T_0}$ représente la valeur moyenne de $s_p(t)$.

(12.3)

CHAPITRE 13

TRANSFORMÉE DE FOURIER DES SIGNAUX ÉCHANTILLONNÉS THÉORÈME DE SHANNON

1. TRANSFORMÉE DE $s^*(t)$

Au chapitre 4, § 1 nous avons défini la fonction échantillonnée idéalisée s^* .

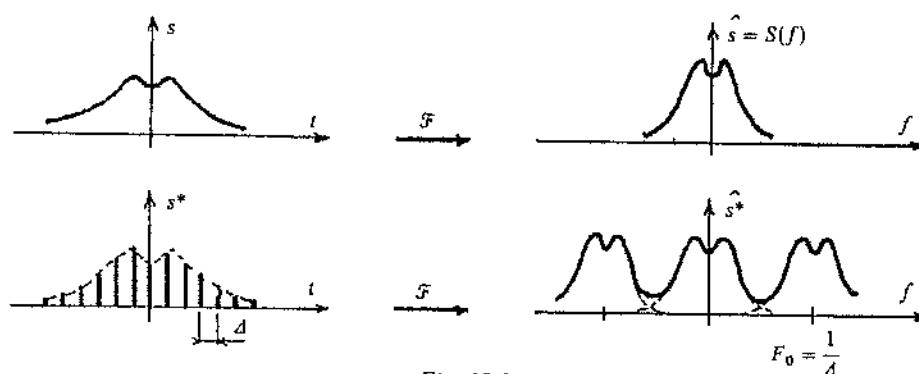


Fig. 13.1.

$$s^*(t) = \Delta \cdot s(t) \cdot \text{comb}(t/D)$$

Le peigne est unitaire de période Δ (Δ n'est pas pris comme unité de temps pour éviter de perdre le contrôle de l'homogénéité).

Donc

$$\widehat{s^*}(f) = \Delta \cdot S(f) * \frac{1}{\Delta} \cdot \text{comb}(f/D)$$

Le peigne $\frac{1}{\Delta} \text{comb}(f/D)$ transformé de $\text{comb}(t/D)$ a pour période (fréquentielle)
 $F_0 = \frac{1}{\Delta}$:

$$\widehat{s^*}(f) = S(f) * \sqcup(f) \quad (13.1)$$

ce qui a pour action de dupliquer $S(f)$ et de périodiser $\widehat{s^*}$.

La transformée d'une fonction échantillonnée au pas Δ est donc une fonction périodique dans l'espace fréquentiel, sa période F_0 est $\frac{1}{\Delta}$.

Ceci est très cohérent avec le théorème de dualité (chap. 10, § 3).

une fonction périodique a un spectre de raies
une fonction échantillonnée (raies temporelles) a un spectre périodique

Remarque

Il apparaît sur la figure 13.1 que si $S(f)$ est trop « large » en fréquence, ou si Δ n'est pas assez fin (F_0 trop petit) le motif $\widehat{s}(f)$ est dupliqué avec recouvrement; il sera donc impossible de l'extraire de $\widehat{s^*}$.

2. RECONSTRUCTION DU SIGNAL TEMPOREL

THÉORÈME DE SHANNON

Peut-on reconstruire un signal $s(t)$ dont on ne connaît que les échantillons? A l'évidence non, puisque la perte d'information entre les points d'échantillonnage est irréparable.

Toutefois, si on *sait d'avance* quelques propriétés de $s(t)$, sa reconstruction devient possible. Par exemple si on *sait* que $s(t)$ est constant entre chaque échantillon, la reconstruction en marches d'escalier est exacte.

2.1. Théorème de Shannon

La connaissance qu'on doit posséder sur $s(t)$ est en fait de nature fréquentielle.

La figure (13.2) montre bien que si F_H est suffisamment petit devant la fréquence d'échantillonnage $F_0 \left(= \frac{1}{\Delta} \right)$, la périodisation due à l'échantillonnage se fait sans recouvrement.

Du spectre périodique du signal échantillonné, il est donc possible d'extraire le spectre $\widehat{s}$ du signal s , et cela à l'aide d'un filtre idéal passe-bas.

La condition minimum apparaît sur la figure.

C'est la condition de Shannon :

$$F_0 \geq 2F_H \quad (13.2)$$

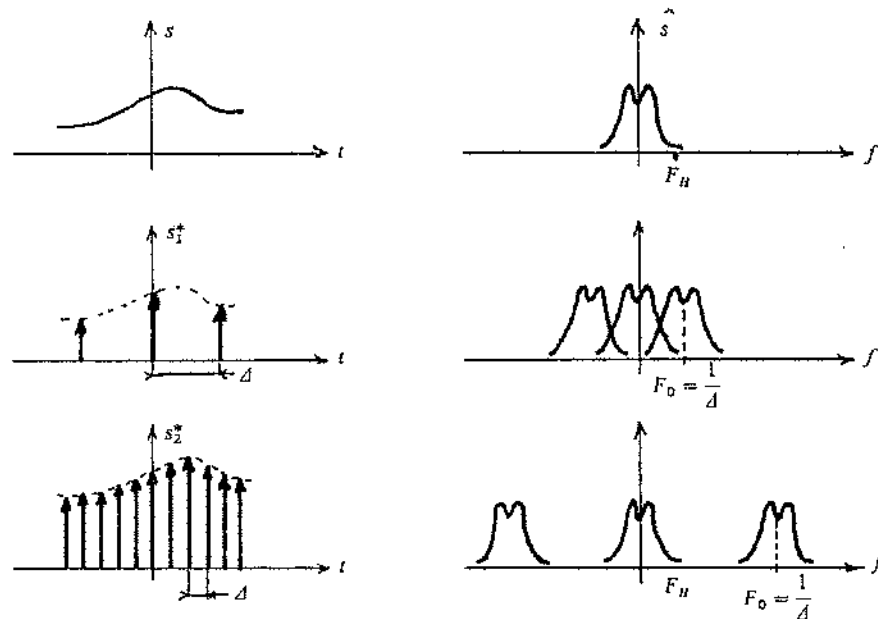


Fig. 13.2.

En pratique :

Filtrage antirepliement (antialiasing).

F_H est donc la fréquence maximale du spectre de $s(t)$. Il n'est pas possible de la connaître, et d'ailleurs F_H varie avec chaque signal. Mathématiquement F_H est infinie.

En pratique, au delà de F_H , les harmoniques restants ne contiennent qu'une faible partie (1 à 2 %) de l'énergie du signal (voir chap. 10, § 6).

Ainsi, F_H sera obtenu sur une ligne d'échantillonnage, par un filtre passe-bas (antialiasing) de fréquence de cassure imposée, qui coupe à un même F_H tous les signaux qui arrivent.

L'échantillonneur qui le suit travaille à $F_0 \geq 2F_H$, en général 5 à $10F_H$.

Ce filtre coupe aussi les « bruits » parasites superposés au signal avant qu'il soit échantillonné; sans lui la reconstruction serait impossible.

2.2. Reconstruction (2 méthodes)

Si la condition de Shannon est respectée, le signal continu est restituable :

- en filtrant le signal échantillonné à travers un passe-bas,
- ou bien, ce qui est très simple, en bloquant chaque échantillon jusqu'à l'arrivée du suivant.

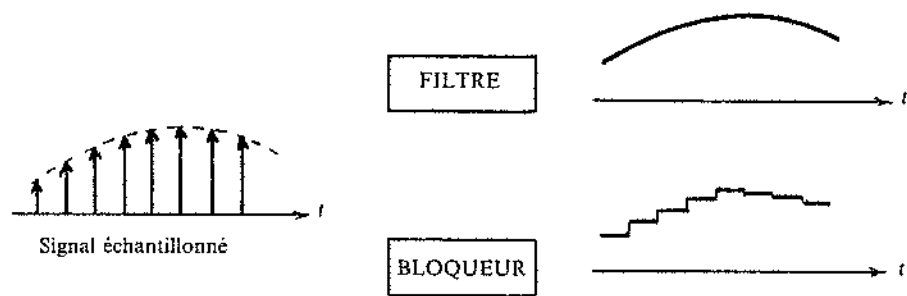
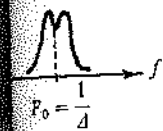


Fig. 13.3.



est pas possible de
 uniquement F_H est
 contiennent qu'une
 0.
 au filtre passe-bas
 même F_H tous les
 général 5 à $10F_H$.
 signal avant qu'il

est restituable :
 4
 échantillon jusqu'à

CHAPITRE 14

TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE

Le traitement du signal par voie numérique, consiste à modifier son spectre fréquentiel puis à restituer le signal traité en le reconstruisant à partir de son spectre modifié.

Les intégrales qui définissent $S(f)$ à partir de $s(t)$ et $s(t)$ à partir de $S(f)$ sont tout simplement approchées par des sommes discrètes, par la méthode des rectangles (chap. 1, § 3). Les bornes, théoriquement infinies, doivent être évaluées pour être finies, et les pas de discrétisation doivent être soigneusement choisis.

Considérons le signal $s(t)$ dont la durée a été limitée à T_0 et sa transformée $S(f)$ dont l'encombrement fréquentiel a été limité à F_e (donc la fréquence la plus haute est $\frac{F_e}{2}$).

Prenons dans $s(t)$ et dans $S(f)$ le même nombre pair N_0 (*) d'échantillons.

Cela revient à définir un pas temporel $\Delta = \frac{T_0}{N_0}$ et

un pas fréquentiel $F_0 = \frac{F_e}{N_0}$.

Si on choisit pour bande de fréquence F_e la même valeur que la fréquence de l'échantillonnage temporel $\frac{1}{\Delta}$, alors on a $\Delta = \frac{1}{F_e}$

et $T_0 = N_0 \cdot \Delta = \frac{N_0}{F_e} = \frac{1}{F_0}$ donc $T_0 = \frac{1}{F_0}$

La figure explicite l'ensemble des conditions requises.

(*) En pratique $N_0 = 2^N$ pour permettre un calcul rapide à l'aide de l'algorithme de Cooley et Tukey (T.F.R. : transformée de Fourier rapide; en anglais F.F.T. : fast Fourier transform).

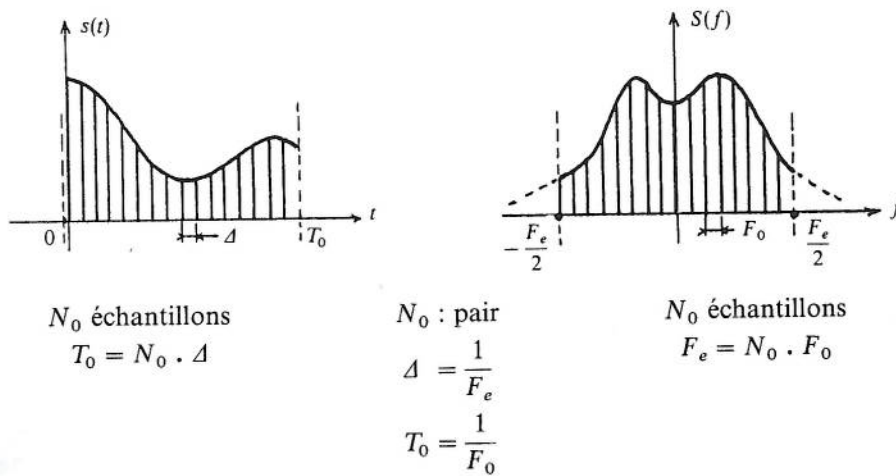


Fig. 14.1.

1. DISCRÉTISATION DES INTÉGRALES

1.1. Transformée de Fourier directe

Puisque $s(t)$ a une durée limitée $[0, T_0]$, l'intégrale de Fourier s'écrit

$$S(f) = \int_0^{T_0} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$S(f) \simeq \Delta \cdot \sum_{k=0}^{N_0-1} s(k\Delta) \cdot e^{-j2\pi f k \Delta}$$

en approchant $S(f)$ par la méthode des rectangles. f est une variable continue, mais le calcul à l'ordinateur n'est possible que pour quelques points. C'est pourquoi nous ne calculons $S(f)$ qu'aux points $f = nF_0$ dans la bande $\left[-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2}\right]$.

En remarquant que $F_0 \cdot \Delta = \frac{1}{N_0}$, on a :

$$S(nF_0) \simeq \Delta \cdot \sum_{k=0}^{N_0-1} s(k\Delta) \cdot e^{-j2\pi \frac{kn}{N_0}} \quad -\frac{N_0}{2} \leq n \leq \frac{N_0}{2} - 1 \quad (*) \quad (14.1)$$

(*) On pose souvent $W = e^{-j\frac{2\pi}{N_0}}$, notamment dans le calcul de la T.F.R.

1.2. Transformée de Fourier inverse

Là encore on a limité la bande spectrale, on a donc :

$$s(t) = \int_{-\frac{F_0}{2}}^{\frac{F_0}{2}} S(f) \cdot e^{+j2\pi ft} df$$

$$s(t) \simeq F_0 \cdot \sum_{n=-\frac{N_0}{2}}^{\frac{N_0}{2}-1} S(nF_0) \cdot e^{+j2\pi nF_0 t}$$

en approchant toujours l'intégrale par une méthode de rectangles.

t est une variable continue, mais nous ne calculerons que quelques échantillons de $s(t)$, limités au nombre N_0 , et dans l'intervalle $[0, T_0]$. En observant à nouveau que $F_0 \cdot \Delta = \frac{1}{N_0}$ il vient :

$s(k\Delta) = F_0 \cdot \sum_{n=-\frac{N_0}{2}}^{\frac{N_0}{2}-1} S(nF_0) \cdot e^{+j2\pi \frac{nk}{N_0}}$	$0 \leq k \leq N_0 - 1$	(14.2)
--	-------------------------	--------

La méthode des rectangles n'est pas exacte et les erreurs commises sont le fait d'une perte d'information; par exemple dans (14.1), pour calculer $S(nF_0)$ il faudrait une infinité des valeurs de $s(t)$, alors que nous ne travaillons qu'avec N_0 valeurs seulement.

En réalité, nous faisons la transformée d'une fonction échantillonnée du temps, C'est ce que nous allons examiner maintenant.

2. TRANSFORMÉE DE FOURIER DIRECTE

Nous avons vu au chapitre 4 § 1 que la fonction échantillonnée $s^*(t)$ est égale à $\Delta \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k\Delta) \cdot \delta(t - k\Delta)$.

Sa transformée est $\hat{s}^*(f) = \Delta \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k\Delta) \cdot e^{-j2\pi k\Delta f}$ (voir transformée des « Dirac » retardés).

D'autre part $\hat{s}^*(f)$ est égale à la duplication du motif $S(f)$ (voir chap. 13-§ 1).

Donc, s'il n'y a pas recouvrement (Shannon respecté) on a

$$\widehat{s^*}(f) \simeq S(f) \quad \text{pour} \quad -\frac{F_e}{2} < f < \frac{F_e}{2}$$

nous avons mis $\simeq$ et non pas $=$, car un signal $s(t)$ de durée limitée à T_0 a un spectre qui a forcément une largeur infinie, il y a donc obligatoirement un recouvrement, même léger.

Dans l'intervalle

$$-\frac{F_e}{2} < f < \frac{F_e}{2} \quad S(f) = \Delta \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k\Delta) \cdot e^{-j2\pi k \Delta f}$$

et donc

$$S(nF_0) = \Delta \cdot \sum_{k=0}^{N_0-1} s(k\Delta) \cdot e^{-j2\pi \frac{kn}{N_0}}$$

en discrétisant f , et en remarquant que $s(t)$ est à durée limitée.

Nous retrouvons bien la formule (14.1), mais elle est cette fois-ci quasi rigoureuse.

Ainsi, la discrétisation par la formule (14.1) donne des valeurs de $S(nF_0)$ exactes si, une fois de plus, Shannon est respecté. Il faut donc prendre un nombre N_0 d'échantillons assez élevé afin que Δ soit petit et que $F_e = \frac{1}{\Delta}$ soit beaucoup plus grand que la plus haute fréquence à transmettre.

(14.2)

3. TRANSFORMÉE DE FOURIER INVERSE

Nous avons également vu, au chapitre 12, la série de Fourier. La fonction périodique $s_P(t)$ s'écrit exactement :

$$s_P(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C(nF_0) \cdot e^{+j2\pi n F_0 t} \quad \text{avec} \quad C(nF_0) = \frac{1}{T_0} S(nF_0)$$

En discrétisant t et en limitant la somme discrète à un nombre raisonnable de termes significatifs (à condition que les termes négligés ne contiennent pas beaucoup d'énergie)

$$s_P(k\Delta) = \frac{1}{T_0} \cdot \sum_{n=-\frac{N_0}{2}}^{\frac{N_0}{2}-1} S(nF_0) \cdot e^{+j2\pi \frac{nk}{N_0}}$$

Comme dans l'intervalle $(0, T_0)$, $s_P = s$, on a de nouveau la formule (14.2).

Ainsi la discrétisation par la formule (14.2) donne peu d'erreur si la fenêtre qui limite le spectre fréquentiel n'est pas trop étroite et si tous les harmoniques significatifs sont pris.

4. TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE ET TRANSFORMÉE EN z

Considérons le signal causal échantillonné $s^*(t)$.

Sa transformée de Fourier (périodique de période $F_e = \frac{1}{\Delta}$) est (§ 2)

$$\mathcal{F}[s^*] = \Delta \cdot \sum_{k=0}^{\infty} s(k\Delta) \cdot e^{-j2\pi f k\Delta}$$

Le signal numérique $[s(k\Delta)]$ admet une transformée en z qui, par définition vaut

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s(k\Delta) \cdot z^{-k}$$

On remarque donc que si on pose

$$z = e^{j2\pi f \Delta}$$

(14.3)

on a $\mathcal{F}[s^*] = \Delta \cdot S(z)$.

La transformée de Fourier d'un signal échantillonné, est donc Δ fois sa transformée en z en remplaçant z par $e^{j2\pi f \Delta}$.

(14.3) indique alors que $|z| = 1$ et $\text{Arg } z = 2\pi f \Delta$.

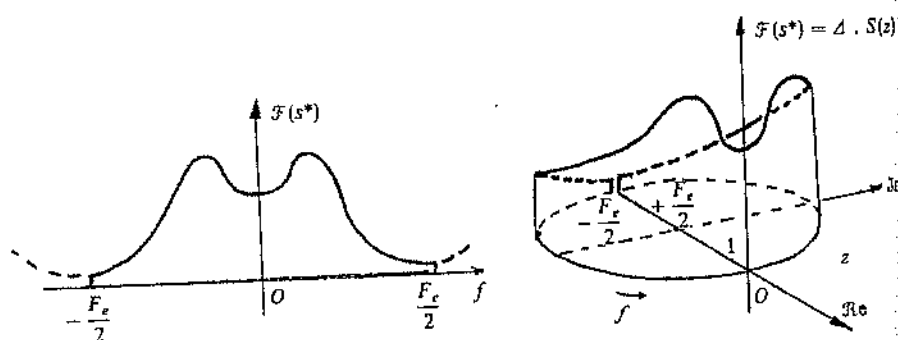


Fig. 14.2.

Ainsi, la transformée en z , quand z se déplace sur le cercle de rayon 1, n'est autre (à Δ près) que la transformée de Fourier.

La fréquence f varie alors de $-\frac{1}{2\Delta}$ à $+\frac{1}{2\Delta}$ $\left(-\frac{F_e}{2} \text{ à } \frac{F_e}{2}\right)$.

Cette propriété est intéressante en filtrage numérique.

Le calc
dont on co
En rem
très simple
Hélas la
L'algori
car il évite

Si on po
est un nom
Ainsi w
et quand k
L'idée d
par un exer
Soit N

Dévelop
 $S(nF_0) =$
Comme w
suite impair

Ainsi $S(nF$

SCRÈTE

5. LA TRANSFORMÉE DE FOURIER RAPIDE (TFR OU FFT)

Le calcul de N_0 échantillons de la transformée de Fourier d'un signal $s(t)$ dont on connaît également N_0 échantillons a été exposé dans ce chapitre.

En remplaçant l'exponentielle par sinus et cosinus, il est possible d'obtenir très simplement le résultat à l'ordinateur.

Hélas la durée du calcul croît comme N_0^2 .

L'algorithme de Cooley et Tukey (1965) réduit beaucoup le temps nécessaire car il évite que soient répétées des opérations déjà faites.

Si on pose $w = e^{-j\frac{2\pi}{N_0}}$ (racine N_0 -ième de l'unité), on a $w^{kn} = e^{-j2\pi\frac{kn}{N_0}}$, kn est un nombre entier.

Ainsi w^{kn} ne peut prendre que N_0 valeurs différentes (les racines de l'unité) et quand kn évolue, on repasse par les mêmes valeurs.

L'idée de Cooley et Tukey exploite cette remarque que nous allons illustrer par un exemple simple.

(14.3) Soit $N_0 = 2^3 = 8$, calculons $S(nF_0)$ pour $n = 0, 1, \dots, 7$

$$S(nF_0) = \sum_{k=0}^{N_0-1} s(k) \cdot w^{kn}.$$

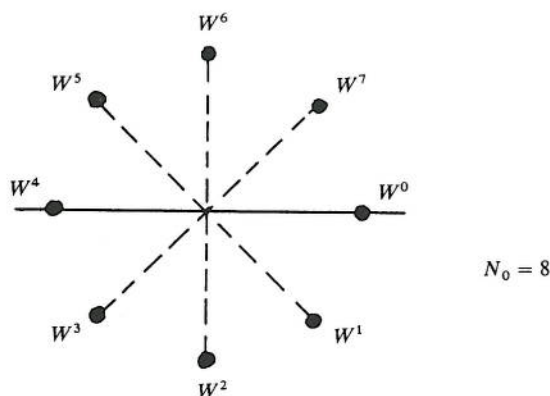


Fig. 14.3.

Développons en séparant les termes k pairs et impairs. Il vient

$$S(nF_0) = s(0)w^{0n} + s(2) \cdot w^{2n} + \dots s(6) \cdot w^{6n} + s(1)w^{1n} + s(3)w^{3n} + \dots s(7)w^{7n}$$

Comme $w^{a+b} = w^a \cdot w^b$, on a $w^{1n} = w^{0n} \cdot w^{1n}$, $w^{3n} = w^{2n} \cdot w^{1n}$, ... donc la suite impaire contient w^{1n} en facteur et s'écrit

$$w^{1n}[s(1) \cdot w^{0n} + s(3)w^{2n} + \dots + s(7)w^{6n}].$$

Ainsi $S(nF_0) = S_P(nF_0) + w^{1n} \cdot S_I(nF_0)$.

S_p est la T.F.D. calculée avec $s(0), s(2) \dots$ les termes de rang pair,
 S_I est la T.F.D. calculée avec $s(1), s(3) \dots$ les termes de rang impair.

Les facteurs w étant $w^{0n}, w^{2n} \dots$, les mêmes dans les deux cas, le temps de calcul est divisé par 2.

L'idée ci-dessus est poursuivie en partageant encore en deux chaque liste jusqu'au terme ultime où il n'y a plus que deux échantillons. (C'est pourquoi on prend $N_0 =$ une puissance de 2.)

6. TRANSFORMÉE DE FOURIER À PLUSIEURS DIMENSIONS

Les opticiens utilisent la transformée de Fourier sous son aspect spatial.

La transformée d'un signal $A(x, y)$ où x et y représentent les variables de position dans le plan s'écrit :

$$\widehat{A}(\alpha, \beta) = \iint_{-\infty}^{+\infty} A(x, y) e^{-j2\pi(\alpha x + \beta y)} dx dy$$

α et β sont les fréquences spatiales, par analogie avec la transformée du signal temporel.

Le traitement d'images est une opération qui procède du filtrage. L'élimination des basses fréquences (spatiales) améliore la netteté des détails. Par exemple le «fond continu» (voile) d'une image apparaît sous la composante spatiale zéro. Son élimination améliore le contraste.

Sous sa forme discrète, en vue du traitement numérique d'images, la transformée de Fourier à deux dimensions s'exprime par :

$$\widehat{A}(n_1, n_2) = S \cdot \sum_{k_1} \sum_{k_2} A(k_1, k_2) e^{-j\frac{2\pi}{N_0}(k_1 n_1 + k_2 n_2)}$$

S est l'élément de surface, N_0^2 est le nombre total d'échantillons (supposé N_0 dans chaque direction).

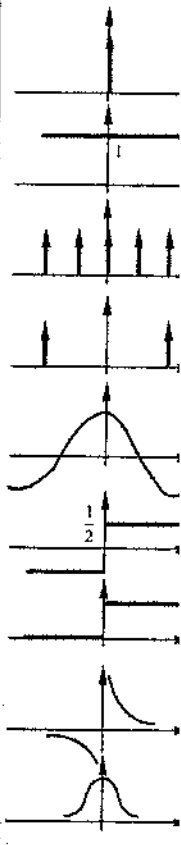
Es

signal réel

dualité

temps réduit

retard

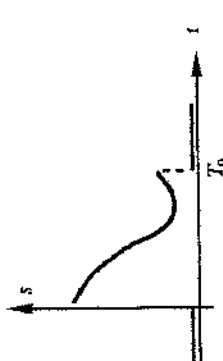
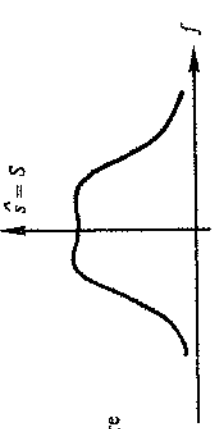
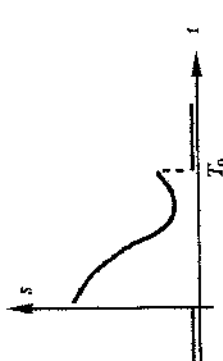
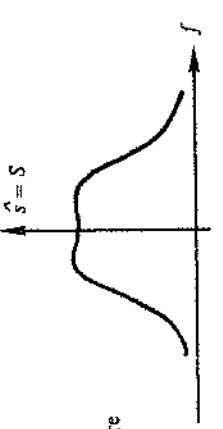
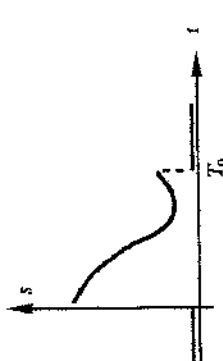
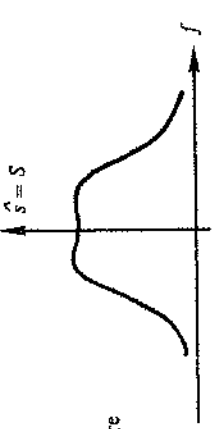
si $s(t) \rightarrow 0$
quand $t \rightarrow \infty$ convolution
produit
corrélation

Transformée de Fourier. Formulaire.

Espace temporel (t)		Espace fréquentiel (f)
signal réel	$s(t)$ $s(-t)$	$S(f)$ $S(-f) = S^*(f)$
dualité	$S(t)$ $S(-t)$	$s(-f)$ $s(+f)$
temps réduit	$s\left(\frac{t}{t_0}\right)$	$ t_0 S(ft_0)$
retard	$s(t - t_0)$ $e^{j2\pi f_0 t} \cdot s(t)$	$e^{-j2\pi f t_0} \cdot S(f)$ $S(f - f_0)$
si $s(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$	$\frac{ds}{dt}$ $-j2\pi t \cdot s(t)$	$j2\pi f \cdot S(f)$ $\frac{dS}{df}$
convolution	$(x * y)(t)$	$X \cdot Y$
produit	$x \cdot y$	$(X * Y)(f)$
corrélation	$(x \hat{*} y)(t)$	$X^* \cdot Y$
$s \rightarrow S = \hat{s}$		
	$\delta(t)$	$Un(f)$
	$Un(t)$	$\delta(f)$
	$\sqcup_d(t)$	$\frac{1}{d} \sqcup_{Fe}(f)$
	$\frac{1}{2} \delta(t + t_0) + \frac{1}{2} \delta(t - t_0)$	$\cos(2\pi t_0 f)$
	$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} \delta(f + f_0) + \frac{1}{2} \delta(f - f_0)$
	$\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$	$\frac{1}{j2\pi f}$ partie imaginaire
	$\Gamma(t)$	$\frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2}$ non représentable
	$\frac{1}{t}$	$-j\pi \operatorname{sgn}(f)$ partie imaginaire
	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$e^{-2\pi^2\sigma^2 f^2}$
GAUSS		

TRANSFORMÉE DE FOURIER

Signaux analogiques à temps continu.

Signal	Description temporelle Signal $s(t)$ réel	Description fréquentielle Représentation de $ S(f) $
Général	$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{+j2\pi ft} df$  durée limitée	$\tilde{S}(f) = S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$  spectre infini
Apériodique	$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{+j2\pi ft} df$  durée limitée	$S(f) = \int_0^{T_0} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$  spectre limité
Apériodique	$s(t) = \int_{-F_H}^{F_H} S(f) \cdot e^{+j2\pi ft} df$  durée limitée	$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$  spectre infini

MOTIF

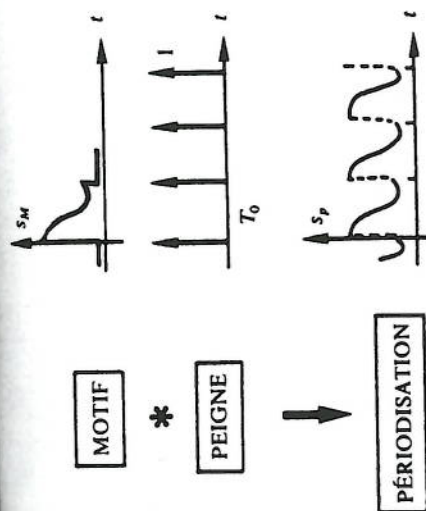
*

F MOTIF

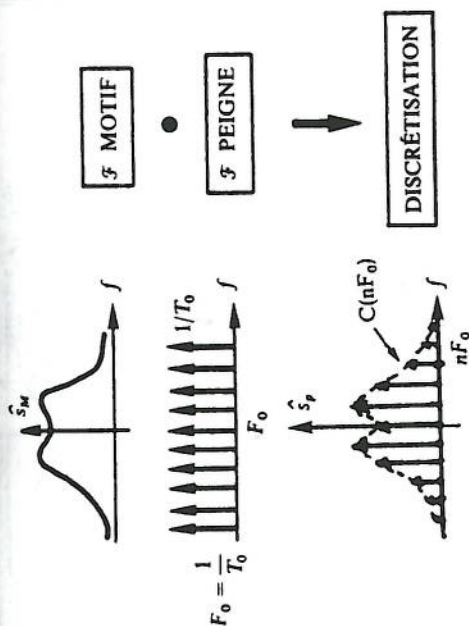
Apériodique

durée
infinie

$$s(t) = \int_{-F_H}^{+F_H} S(f) \cdot e^{+j2\pi f t} df$$



Périodique



Série de Fourier

$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C(nF_0) \cdot e^{+j2\pi n F_0 t}$$

$$C(nF_0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s_p(t) \cdot e^{-j2\pi n F_0 t} dt$$

$$\hat{s}_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C(nF_0) \cdot \delta(f - nF_0)$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

Signaux échantillonnés à temps discret.

Signal	Description temporelle	Description fréquentielle
Échantillonné	signal peigne discretisation $s^*(t) = D \cdot s(t) \cdot \text{LLI}(t)$	$\mathcal{F}$ signal * peigne périodisation $\hat{s} = S(f)$ $F_e = \frac{1}{D}$ $\hat{s}^*(f) = \hat{s}(f) * \text{LLI}(f)$ $\hat{s}^*(f) = D \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kD) e^{-j2\pi k D f}$ $= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{s}(f - nF_e)$
Apériodique		$s^*(t) = D \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kD) \delta(t - kD)$ → s'il n'y a pas recouvrement (Shannon)

discretisation $s^*(t) = \Delta \cdot s(t) \cdot \text{III}(t)$	$\hat{s}^*(f) = \hat{s}(f) * \text{III}(f)$ $\hat{s}^*(f) = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{s}(k\Delta) e^{-j2\pi k\Delta f}$ $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{s}(f - nF_e)$	s'il n'y a pas recouvrement (Shannon) $\hat{s}^*(f) \approx \hat{s}(f) \quad \text{pour} \quad -\frac{F_e}{2} < f < \frac{F_e}{2}$	Échantillonné Périodique
signal discret $s(k\Delta) \approx \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} S(f) \cdot e^{j2\pi f k\Delta} df$	signal discret $T_0 = N_0 \Delta$	signal discret $T_0 = N_0 \Delta$	signal discret périodique $T_0 = N_0 \Delta$
signal discret $T_0 = N_0 \Delta$	signal discret $T_0 = N_0 \Delta$	signal discret $T_0 = N_0 \Delta$	signal discret périodique $T_0 = N_0 \Delta$

$$S(nF_0) = \Delta \sum_{k=N_0-1}^{kn} s(k\Delta) e^{-j2\pi \frac{kn}{N_0}}$$

$$\hat{s}_p^* = F_0 \cdot S \quad \text{pour} \quad -\frac{N_0}{2} \leq n \leq \frac{N_0}{2} - 1$$

CHAPITRE 15

FONCTIONS DE TRANSFERT

1. DÉFINITION

Soit un système linéaire à temps invariant (S.L.T.I.), de réponse impulsionnelle h .

Lorsque le système au repos est excité par une action causale sa réponse (forcée) s'exprime (chap. 6, § 4) par le produit de convolution

$$y = h * u$$

Si on applique à cette relation temporelle une transformation appropriée ($\mathcal{L}$, $\mathcal{Z}$ ou $\mathcal{F}$), on obtient le produit simple des transformées $Y = H \cdot U$.

$H = \frac{Y}{U}$ est la fonction de transfert du système, c'est aussi la transformée de sa réponse impulsionnelle.

2. FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME À TEMPS DISCRET

La relation entrée-sortie est une équation récurrente, les valeurs initiales sont nulles, l'excitation u est causale. Par exemple, en écrivant $y(k\Delta) = y(k)$ pour alléger l'écriture on a :

$$\begin{cases} y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k+1) \\ y(0) = y(1) = 0 \quad u(k) = 0 \text{ pour } k \leq 0. \end{cases}$$

En prenant la transformée en z , et compte tenu des conditions initiales nulles, on obtient :

$$\begin{aligned} Y(z)(z^2 + a_1 z + a_0) &= U(z)(b_0 + b_1 z) \\ H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{b_0 + b_1 z}{a_0 + a_1 z + z^2} \end{aligned} \quad (15.1)$$

apparaît comme une fraction rationnelle en z .

Il est int
rieur, quelq
Si on rer
transformée
Cette pro
en fréquence
on déduit pa
on s'impose

3. F

La relatic
initiales $y(0^-)$
de Laplace d
en p .

Par exemple
donne

ce qui détern

La fonction
fonctions de

D'UN

4.1. Quel e

Un systèm
(ou systèm d
c'est $H(z)$.

Mais le sy
 $G(p)$.

Peut-on tr
La réponse

Il est intéressant d'observer que le degré du numérateur sera souvent inférieur, quelquefois égal à celui du dénominateur.

Si on remplace z par $e^{j2\pi f\Delta}$ dans (15.1) on obtient d'après chap. 14, § 4, la transformée de Fourier $H_1(f)$ de la réponse impulsionnelle $h(k)$.

Cette propriété est à la base de la synthèse des filtres numériques. La « réponse en fréquence » du filtre se traduit par un gabarit de $|H_1(f)|$ qui est imposé, duquel on déduit par des méthodes d'estimation les coefficients $a_0, a_1 \dots$ du filtre (dont on s'impose a priori la structure).

3. FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME À TEMPS CONTINU

La relation entrée-sortie est une équation différentielle linéaire, les valeurs initiales $y(0^-), \dots u(0^-) \dots$ sont nulles. $H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$ calculée après transformation de Laplace de l'équation différentielle apparaît comme une fraction rationnelle en p .

Par exemple $\dot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 y(t) = b_0 u(t)$

donne $Y(p)(p^2 + a_1 p + a_2) = b_0 U(p)$

ce qui détermine $H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$.

La fonction de transfert de systèmes linéaires en cascade est le produit des fonctions de transfert.

4. FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME (CONTINU) ÉCHANTILLONNÉ

4.1. Quel est le problème ?

Un système analogique placé entre échantillonneurs est un système numérique (ou système discret). Sa fonction de transfert est donc définie dans l'espace z , c'est $H(z)$.

Mais le système analogique (continu) est connu par sa fonction de transfert $G(p)$.

Peut-on trouver très simplement $H(z)$ connaissant $G(p)$?

La réponse est NÉGATIVE dans le cas général.

(15.1)

La démarche passe alors (*) par les fonctions du temps.

$$G(p) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} g(t) \xrightarrow{\mathcal{Z}} g(k\Delta) \xrightarrow{\mathcal{Z}} H(z).$$

En raccourci $H(z) = \mathcal{Z}[G(p)]$.

(15.2)

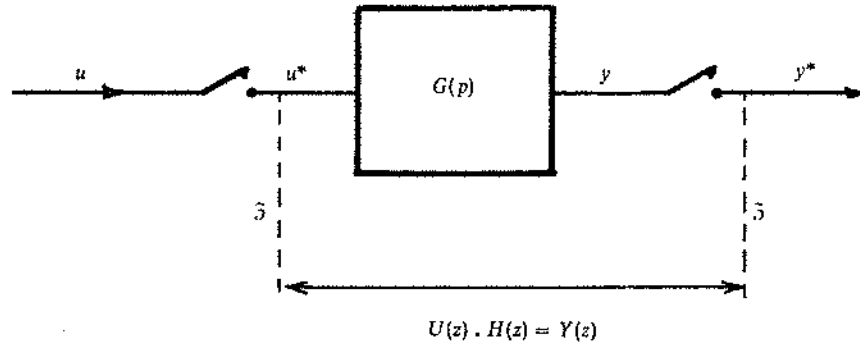


Fig. 15.1.

4.2. Système échantillonné muni d'un bloqueur d'ordre zéro (B.O.Z.)

Dans les chaînes de régulation, le système échantillonné contient un *bloqueur d'ordre zéro* (chap. 4, § 5), en sorte que l'entrée du processus, $u(t)$, bloquée, est en marches d'escalier.

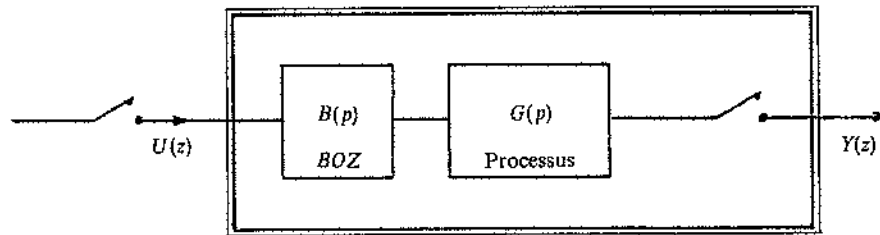


Fig. 15.2.

La fonction de transfert $H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$ s'écrit donc d'après (15.2)

$$H(z) = \mathcal{Z}[B(p) \cdot G(p)]. \quad (15.3)$$

(*) Dans le tome 2 nous verrons des méthodes simples (mais très approximatives) pour obtenir $H(z)$ à partir de $G(p)$ pour des systèmes avec leur bloqueur d'ordre zéro. L'une d'elle consiste à remplacer p par $\frac{2}{\Delta} \cdot \frac{z-1}{z+1}$ dans $G(p)$.

Il faut
en $\mathcal{Z}[B(p)]$
Déterm
Le B.O.
de l'impuls
durée Δ .

On a

et

$$\text{d'où } \frac{Y}{U} =$$

En report.

$$\frac{G(p)}{p} \text{ est}$$

l'échantillonnage

$$e^{-p\Delta} \cdot \frac{G(p)}{p}$$

pas, ce qui se

Il faut absolument noter que le produit $B(p) \cdot G(p)$ ne peut pas être séparé en $\mathfrak{Z}[B(p)] \cdot \mathfrak{Z}[G(p)]$.

Déterminons la fonction de transfert $B(p)$ du B.O.Z. d'après la figure 15.3.

Le B.O.Z. bloque l'impulsion unitaire pendant le temps Δ , jusqu'à l'arrivée de l'impulsion suivante (ici nulle); sa sortie est donc un créneau unitaire de durée Δ .

On a

$$U(p) = 1$$

et

$$Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\Delta} \quad (\text{chap. 8, § 4})$$

$$\text{d'où } \frac{Y}{U} = B(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\Delta}.$$

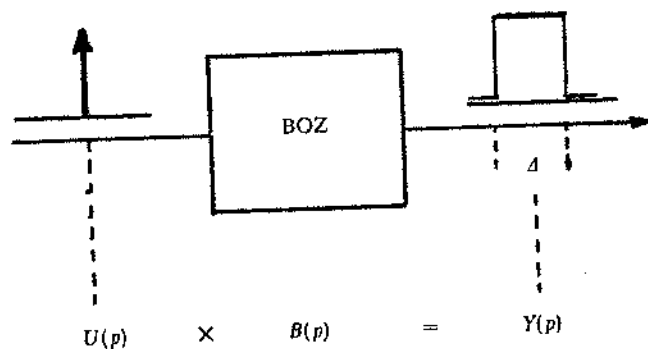


Fig. 15.3.

En reportant dans (15.3) il vient

$$H(z) = \mathfrak{Z} \left[\frac{G(p)}{p} - e^{-p\Delta} \cdot \frac{G(p)}{p} \right].$$

$\frac{G(p)}{p}$ est la Transformée de Laplace d'une fonction du temps dont l'échantillonnage admet une transformée en z notée $\mathfrak{Z} \left[\frac{G(p)}{p} \right]$.

$e^{-p\Delta} \cdot \frac{G(p)}{p}$ représente la fonction du temps précédente mais retardée d'un pas, ce qui se traduit dans le plan z par la multiplication par z^{-1} ; donc

$$H(z) = \mathfrak{Z} \left[\frac{G(p)}{p} \right] - z^{-1} \mathfrak{Z} \left[\frac{G(p)}{p} \right]$$

$$\boxed{H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \mathfrak{Z} \left[\frac{G(p)}{p} \right]} \quad (15.4)$$

Exemple

Un système continu du premier ordre $G(p) = \frac{K}{1 + Tp}$ muni d'un B.O.Z. et échantillonné a pour fonction de transfert

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \mathfrak{Z} \left[\frac{K}{p(1 + Tp)} \right]$$

Évaluons $H(z)$ selon le schéma décrit au § 4,1.

$$\mathfrak{L}^{-1} \left(\frac{K}{p(1 + Tp)} \right) = s(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}); \quad s(kT) = K(1 - e^{-\frac{k}{T}})$$

qui admet comme transformée en z : $\mathfrak{Z} \left(\frac{G(p)}{P} \right) = K \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-\frac{1}{T}}} \right)$ d'où

$$H(z) = K \cdot \frac{1 - e^{-\frac{1}{T}}}{z - e^{-\frac{1}{T}}}$$

Des formules de correspondances regroupées dans un tableau en fin d'ouvrage faciliteront ce travail.

APPENDICE

Nous allons donner ici quelques démonstrations (rapides) relatives aux transformées de Fourier au sens des distributions de 3 fonctions particulières.

1. Transformée de $s(t) = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{t} \right)$ est dénommée pseudo-fonction

Soit $S(f)$ la transformée cherchée.

D'après le théorème (*) sur la dérivée, $\frac{dS}{df}$ est transformée de $(-j2\pi t) \cdot \frac{1}{t}$.

Donc $\frac{dS}{df} = -j2\pi \cdot \delta(f)$, transformée de la constante $-j2\pi$.

(*) Son application ici pose problème, car la fonction $\frac{1}{t}$ ne décroît pas plus vite que $\dots \frac{1}{t}$ ce qui est l'expresse condition de validité du théorème, au sens des fonctions. Nous sommes ici dans les distributions!

En intégr
Détermi
 $s(t)$ est r
impaire, ain

avec

donc $2K =$

Ainsi

$\left[\frac{1}{t} \right]$ est la di

2. Transfo

D'après l

3. Transfo

donc

On observ
transformée d

On remarque

a précisément

$\mathfrak{L}[f(t)]$ qui va

En intégrant, $S(f) = -j2\pi \cdot \Gamma(f) + \text{constante}$.

Déterminons la constante d'intégration.

$s(t)$ est réelle et impaire, donc $S(f)$ est imaginaire pure et de partie imaginaire impaire, ainsi :

$$S(f) = j[-2\pi \cdot \Gamma(f) + K]$$

avec

$$-2\pi\Gamma(-f) + K = -(-2\pi\Gamma(f) + K)$$

$$\text{donc } 2K = 2\pi(\Gamma(f) + \Gamma(-f)) = 2\pi.$$

Ainsi

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{t}\right] = j\pi(1 - 2\Gamma(f))$$

$\left[\frac{1}{t}\right]$ est la distribution associée à la pseudo-fonction $\frac{1}{t}$.

2. Transformée de $s(t) = \text{sgn}(t)$ [lire signe de t]

$$\text{sgn}(t) = 2\Gamma(t) - 1 \quad \text{car} \quad \text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t > 0 \\ -1 & \text{pour } t < 0. \end{cases}$$

D'après le résultat précédent et le théorème de dualité

$$\mathcal{F}[1 - 2\Gamma(t)] = \frac{-1}{j\pi f} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{F}[\text{sgn } t] = \frac{1}{j\pi f}.$$

3. Transformée de $s(t) = \Gamma(t)$

$$\mathcal{F}(2\Gamma(t) - 1) = \frac{1}{j\pi f} = 2\mathcal{F}[\Gamma] - \delta(f)$$

donc

$$\mathcal{F}[\Gamma] = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f).$$

On observe que l'on n'a pas pu appliquer le très commode théorème sur la transformée de la dérivée car $s(t)$ ne tend pas vers zéro pour t tendant vers l'infini.

On remarque que $\Gamma(t)$ et $\frac{1}{2}\text{sgn}(t)$ diffèrent d'une constante de translation $\frac{1}{2}$, qui

a précisément pour transformée $\frac{1}{2}\delta(f)$. L'expression $\mathcal{F}[\Gamma]$ est à rapprocher de

$\mathcal{L}[\Gamma(t)]$ qui vaut $\frac{1}{p}$. On est donc tenté d'écrire $\mathcal{F}(\Gamma) = \frac{1}{j2\pi f}$ qui est inexacte.

4. Transformée d'un peigne de Dirac

$$\hat{\square} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(t - i\Delta) \quad (\text{A.1})$$

$$\hat{\square} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j2\pi f i \Delta} \quad (\text{théorème du retard}) \quad (\text{A.2})$$

Sous cette somme manifestement non convergente au sens des fonctions, mais convergente au sens des distributions, se cache un autre peigne de Dirac.

La démonstration échappe au niveau de ce cours, mais nous pouvons approcher la solution.

1) $\hat{\square}$ est une « fonction » de f , presque partout nulle. Il y a là une propriété vraie pour toutes les fonctions périodiques et $\hat{\square}(t)$ l'est (période Δ).

2) $\hat{\square}$ est une « fonction » de f , périodique et de période $\frac{1}{\Delta}$.

En effet : $e^{-j2\pi n f \Delta}$ est périodique, de période $F_0 = \frac{1}{\Delta}$ pour toutes les valeurs de n .

On le vérifie en changeant f en $f + F_0$.

3) $\hat{\square}$ se présente donc comme une « fonction » nulle sauf aux points $\dots - F_0, 0, F_0, 2F_0, \dots$

Admettons $\hat{\square}$ formée d'impulsions de Dirac de mesure inconnue a .

$$\hat{\square} = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nF_0) \quad \text{avec} \quad F_0 = \frac{1}{\Delta}. \quad (\text{A.3})$$

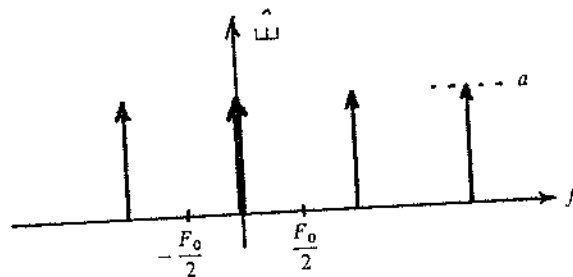
La recherche de la mesure de « a » relève de considérations énergétiques.

On doit avoir d'après les expressions (A.2) et (A.3)

$$a \sum_n \delta(f - nF_0) = \sum_i e^{-j2\pi i f \Delta}.$$

Formons l'intégrale de mesure de a en sommant les deux membres de $-\frac{F_0}{2}$

à $+\frac{F_0}{2}$, il vient :



$$\int_{-\frac{F_0}{2}}^{+\frac{F_0}{2}} a \cdot \delta(f) \cdot df = \int_{-\frac{F_0}{2}}^{+\frac{F_0}{2}} \left(\sum_i e^{-j2\pi i f \Delta} \right) df.$$

(A.1)

Le premier membre vaut a , « mesure » du Dirac central. Le deuxième peut s'écrire en permutant (est-ce licite?) les ordres de sommation :

$$\sum_i \int_{-\frac{F_0}{2}}^{+\frac{F_0}{2}} e^{-j2\pi i f \Delta} df \quad \text{qui s'intègre facilement et vaut :}$$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta} \frac{\sin(i\pi)}{i\pi} \quad \text{car } F_0 \Delta = 1.$$

Mais $\frac{\sin(i\pi)}{i\pi}$ vaut zéro partout sauf pour $i = 0$, où il vaut 1. D'où $a = \frac{1}{\Delta}$

représente la mesure de $\hat{\square}(f)$.